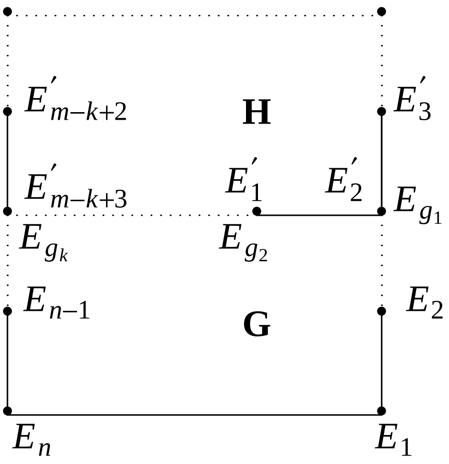
Anschluß fm Graph an fm Graph

Definition Anschluß fm Graph an fm Graph

Seien G, H fm Graphen. Der Anschluß von H an G wird an folgender Figur erklärt:



Figur fmG_an_fmG

|G|=n, |H|=m. E_{index} bezeichnet Randecke von G. E'_{index} bezeichnet Randecke von H, und es ist $E'_1 = E_{g_2}$, $E'_2 = E_{g_1}$, $E'_{m-k+3} = E_{g_k}$. $E_{g_i} = E'_{m-i+3}$, i = 3, ..., k.
Es werden $k \geq 3$ Ecken von G mit k Ecken von H identifiziert.
Dieser Graph wird mit L = G + H bezeichnet und auch mit L(|G|, |H|, k).
Bemerkung: Es ist möglich, daß L nicht schlicht ist.

Lemma 9

L(k, k, k) ist ein fm Graph mit FS.
L(k, k, k) ist maximal und nicht schlicht.
In diesem speziellen Fall machen wir Gebrauch von der Tatsache, daß alles voranstehende auch mit der entgegengesetzten Orientierung des Randes formuliert und bewiesen werden kann.

Für H haben wir dasselbe FS wie für G jedoch mit entgegengesetzter Orientierung. Es werden alle Randecken identifiziert und alle Färbungen passen.

Satz

Seien G, H fm Graphen mit FS. Sei L = G + H, k >= 3.
Dann ist L ein fm Graph mit FS.
Zu zeigen: zu jeder Wahl einer Kante K von G, die Randkante von L ist, gibt es ein FS(L) mit K als Basisseite.
Beweis:
Für die Spezialfälle |G|=|H|=k ist dies Lemma 9
Sei |G|+|H| > 2k, dann ist |L| = n + m - 2k + 2. (mit |G|=n, |H|=m.)

Der Beweis besteht in der Konstruktion des FS(L). Diese erfolgt - wie oben in allen Beispielen - in drei Schritten.

Wir wählen K (die Basisseite von L) als Basisseite von G.

(1) Für E_1, ..., E_{g_1} wird das FS(G) als (Anfang des) FS(L) genommen.

(2) Für $E_3^{'}$, ..., $E_{m-k+2}^{'}$ werden Färbungen von den möglichen FS(H) genommen, wobei ($E_1^{'}$, $E_2^{'}$) die Basisseite von H ist. Diese FS(H) hängen ab von $f(E_2^{'}) = f(E_{g_1})$ und $f(E_1^{'}) = f(E_{g_2})$.
Es ist zu zeigen, daß Färbungen dieser FS(H) zulässig sind, d. h. daß es zu ihren Farben auf $E_{m-k+3}^{'}$, ... $E_m^{'}$ passende Farben im FS(G) gibt für die entsprechenden Ecken E_{g_k}, $E_{g_{k-1}}$, ... E_{g_3}.

(3) Das FS(L) wird mit TFS von FS(G) zu den Elementen in der Spalte von E_{g_k} gegebenenfalls fortgesetzt.

Die Basisseite ($E_1^{'}$, $E_2^{'}$) von H ist frei wählbar. Je nach Wahl der Basisseite von G ergibt sich die Lage der gekoppelten Ecken des FS(G), davon hängt wiederum unsere Wahl der Basisseite von H ab. Zunächst wird die Basisseite von H gewählt wie in Figur fmG_an_fmG dargestellt. Hier liegen die gekoppelten Ecken von G auf dem Rand von L und werden nicht mit Ecken von H identifiziert. Der Fall, daß mindestens eine gekoppelte Ecke von G mit einer Ecke von H identifiziert wird, wird später betrachtet.

Teil (1) und (3) sind nach den voranstehenden Beispielen klar.

Für (2) sind verschiedene Fälle zu untersuchen. Dazu sind zu den Ecken, die identifiziert werden, alle möglichen Blöcke von FS(H) und FS(G) zu betrachten und es ist zu zeigen, daß es "passende" Färbungen gibt.

Welche Blöcke im FS(H) mit den gekoppelten Spalten - also zu den Ecken E'_{m-3}, ..., E'_m - möglich sind, hängt ab von $f(E'_1)$.

$f(E'_1)$ kommt nicht in der letzten Spalte des Blockes vor. (Eigenschaft jeden FS.)

Die möglichen Blöcke im FS(H) für $f(E'_1) = 1$ sind:

E'_{m-3}	E'_{m-2}	E'_{m-1}	E'_m	E'_1
		1	4, 2	
	2			
		4	2	
1				1
		1	2, 4	
	4			
		2	4	

E'_{m-3}	E'_{m-2}	E'_{m-1}	E'_m	E'_1
		1	4, 2	
	2			
		4	2	
4				1
		2	4	
	1			
		4	2	

E'_{m-3}	E'_{m-2}	E'_{m-1}	E'_m	E'_1
		2	4	
	1			
		4	2	
2				1
		2	4	
	4			
		1	2, 4	

Im FS(H) liegt für E'_{m-3}, E'_{m-2}, E'_{m-1}, E'_m einer dieser drei Blöcken vor. Welcher Block tatsächlich vorliegt hängt ab von |H|. (Da wir über |H| keine Voraussetzung machen, sind alle Möglichkeiten zu betrachten.)
Das gilt auch für die nächsten Fälle $f(E'_1) = 2$, $f(E'_1) = 4$.

Die möglichen Blöcke im FS(H) für $f(E_1^{'}) = 2$ sind:

$E_{m-3}^{'}$	$E_{m-2}^{'}$	$E_{m-1}^{'}$	$E_m^{'}$	$E_1^{'}$
		1	4	
	2			
		4	1	
1				2
		1	4	
	4			
		2	1, 4	

$E_{m-3}^{'}$	$E_{m-2}^{'}$	$E_{m-1}^{'}$	$E_m^{'}$	$E_1^{'}$
		2	4, 1	
	1			
		4	1	
2				2
		2	1, 4	
	4			
		1	4	

$E_{m-3}^{'}$	$E_{m-2}^{'}$	$E_{m-1}^{'}$	$E_m^{'}$	$E_1^{'}$
		4	1	
	1			
		2	4, 1	
4				2
		4	1	
	2			
		1	4	

Die möglichen Blöcke im FS(H) für $f(E_1^{'}) = 4$ sind:

$E_{m-3}^{'}$	$E_{m-2}^{'}$	$E_{m-1}^{'}$	$E_m^{'}$	$E_1^{'}$
		1	2	
	2			
		4	1, 2	
1				4
		1	2	
	4			
		2	1	

E'_{m-3}	E'_{m-2}	E'_{m-1}	E'_m	E'_1
		2	1	
	1			
		4	2, 1	
2				4
		2	1	
	4			
		1	2	

E'_{m-3}	E'_{m-2}	E'_{m-1}	E'_m	E'_1
		4	2, 1	
	1			
		2	1	
4				4
		4	1, 2	
	2			
		1	2	

Als Anschluß von H an G betrachten wir den Fall, daß keine gekoppelte Ecke von G mit Ecken von H identifiziert wird, d. h. n-1 > g_k.

Für die Konstruktion des FS(L) wird als Basisseite von H (E'_1, E'_2) gewählt wie in Figur fmG_an_fmG dargestellt.

Die möglichen Blöcke im FS(G) in Abhängigkeit von $f(E_{g_2})$ sind (E_{g_4}, E_{g_5} nicht gekoppelt.)

E_{g_2}	E_{g_3}	E_{g_4}	E_{g_5}	E_{g_2}	E_{g_3}	E_{g_4}	E_{g_5}	E_{g_2}	E_{g_3}	E_{g_4}	E_{g_5}
			2				1				1
		1				2				4	
			4				4				2
	2				1				1		
			2				1				1
		4				4				2	
			1				2				4
1				2				4			
			4				4				2
		1				2				4	
			2				1				1
	4				4				2		
			4				4				2
		2				1				1	
			1				2				4

Um die passenden Färbungen leichter zu sehen werden die Blöcke in eine Tabelle eingetragen.

E_{g_2}	E_{g_3}	E_{g_4}	E_{g_5}
			2
		1	
			4
	2		
			2
		4	
			1
1			
			4
		1	
			2
	4		
			4
		2	
			1

mögliche Blöcke des FS(H) ($f(E_{g_2}) = f(E'_1) = 1$)

E'_1	E'_m	E'_{m-1}	E'_{m-2}	
	4, 2	1		
			2	
	2	4		
1				1
	2, 4	1		
			4	
	4	2		
oder				
	4, 2	1		
			2	
	2	4		
1				4
	4	2		
			1	
	2	4		
oder				
	4	2		
			1	
	2	4		
1				2
	4	2		
			4	
	2, 4	1		

Zu jeder Färbung aus einem der möglichen Blöcke des FS(H) (d. h. gleichgültig welcher Block tatsächlich vorliegt) gibt es passende Färbung im FS(G) für E_{g_3}, E_{g_4}, E_{g_5}.
Der Anschluß ist also für $E_1' = E_{g_2}$, $E_m' = E_{g_3}$, $E_{m-1}' = E_{g_4}$, $E_{m-2}' = E_{g_5}$ möglich.
Dies ist auch noch für die Ecken E_{m-3}', E_{m-4}', E_{m-5}', ..., E_{m-k+3}' nachzuweisen. Die möglichen Werte (nur ein Wert) für $f(E_{m-i-1}')$ in Abhängigkeit von $f(E_{m-i}')$ sind, i = 3, ... , k-3

$f(E_{m-i-1}')$	$f(E_{m-i}')$
1	2 oder 4
2	1 oder 4
4	1 oder 2

In Worten: wenn ein Element einer Spalte z. B. gleich "1" ist, so ist das zugehörige Element der kürzeren Spalte gleich "2" oder gleich "4", usw. Die möglichen Werte für $f(E_{g_{j+1}})$ in Abhängigkeit von $f(E_{g_j})$ (beide Werte sind möglich!) sind, j = 5, ... , k-1

$f(E_{g_j})$	$f(E_{g_{j+1}})$
1	2 und 4
2	1 und 4
4	1 und 2

Also gibt es immer "passende" Färbungen.

Dies war der Fall $f(E_{g_2}) = f(E_1') = 1$.

Es folgen - analog - die Fälle $f(E_{g_2}) = 2$ und $f(E_{g_2}) = 4$.

Wir betrachten nun $f(E_{g_2}) = f(E_1^{'}) = 2$.

E_{g_2}	E_{g_3}	E_{g_4}	E_{g_5}
			1
		2	
			4
	1		
			1
		4	
			2
2			
			4
		2	
			1
	4		
			4
		1	
			2

mögliche Blöcke des FS(H)

$E_1^{'}$	$E_m^{'}$	$E_{m-1}^{'}$	$E_{m-2}^{'}$	
	4	1		
			2	
	1	4		
2				1
	4	1		
			4	
	1, 4	2		
oder				
	4, 1	2		
			1	
	1	4		
2				2
	1, 4	2		
			4	
	4	1		
oder				
	1	4		
			1	
	4, 1	2		
2				4
	1	4		
			2	
	4	1		

Zu jeder Färbung aus einem der möglichen Blöcke des FS(H) (d. h. gleichgültig welcher Block tatsächlich vorliegt) gibt es passende Färbung im FS(G) für E_{g_3}, E_{g_4}, E_{g_5}.
Der Anschluß ist also für $E_1' = E_{g_2}$, $E_m' = E_{g_3}$, ... möglich.
Dies ist auch noch für die Ecken E_{m-3}', E_{m-4}', E_{m-5}', ... nachzuweisen. Die möglichen Werte (nur ein Wert) für $f(E_{m-i-1}')$ in Abhängigkeit von $f(E_{m-i}')$ sind, i = 2, ... , k

$f(E_{m-i-1}')$	$f(E_{m-i}')$
1	2 oder 4
2	1 oder 4
4	1 oder 2

Die möglichen Werte für $f(E_{g_{j+1}})$ in Abhängigkeit von $f(E_{g_j})$ (beide Werte sind möglich!) sind, j = 4, ... , k-1

$f(E_{g_j})$	$f(E_{g_{j+1}})$
1	2 und 4
2	1 und 4
4	1 und 2

Also gibt es immer "passende" Färbungen.

Dies war der Fall $f(E_{g_2}) = f(E_1') = 2$.

Wir betrachten nun $f(E_{g_2}) = f(E_1') = 4$.

E_{g_2}	E_{g_3}	E_{g_4}	E_{g_5}
			1
		4	
			2
	1		
			1
		2	
			4
4			
			2
		4	
			1
	2		
			2
		1	
			4

mögliche Blöcke des FS(H)

E_1'	E_m'	E_{m-1}'	E_{m-2}'	
	2	1		
			2	
	1, 2	4		
4				1
	2	1		
			4	
	1	2		

oder

	1	2		
			1	
	2, 1	4		
4				2
	1	2		
			4	
	2	1		

oder

	2, 1	4		
			1	
	1	2		
4				4
	1, 2	4		
			2	
	2	1		

Zu jeder Färbung aus einem der möglichen Blöcke des FS(H) (d. h. gleichgültig welcher Block tatsächlich vorliegt) gibt es passende Färbung im FS(G) für E_{g_3}, E_{g_4}, E_{g_5}.
Der Anschluß ist also für $E'_1 = E_{g_2}$, $E'_m = E_{g_3}$, ... möglich.
Dies ist auch noch für die Ecken E'_{m-3}, E'_{m-4}, E'_{m-5}, ... nachzuweisen. Die möglichen Werte (nur ein Wert) für $f(E'_{m-i-1})$ in Abhängigkeit von $f(E'_{m-i})$ sind, i = 2, ... , k

$f(E'_{m-i-1})$	$f(E'_{m-i})$
1	2 oder 4
2	1 oder 4
4	1 oder 2

Die möglichen Werte für $f(E_{g_{j+1}})$ in Abhängigkeit von $f(E_{g_j})$ (beide Werte sind möglich!) sind, j = 4, ... , k-1

$f(E_{g_j})$	$f(E_{g_{j+1}})$
1	2 und 4
2	1 und 4
4	1 und 2

Also gibt es immer "passende" Färbungen.

Dies war der Fall $f(E_{g_2}) = f(E'_1) = 4$.