Die Anzahl der Färbungen ebener Graphen

Lorenz Friess

Zusammenfassung

Sei G ein endlicher, ebener, zusammenhängender, schlichter Graph. Die Vielecke von G seien alle bis auf höchstens eins - etwa V^* - Dreiecke, k bezeichne die Anzahl der Ecken von V^*. Dann gibt gibt es mindestens 2^{k-3} vierfarbige Färbungen der Ecken von G, derart, daß Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, verschieden gefärbt sind. Diese Färbungen sind auf V^* verschieden.

Abstract

Let G be a finite planar connected graph without loops or multiple edges. All minimal circuits except one - say C^* - are triangles. Let k be the number of vertices of C^*. There are at least 2^{k-3} colorings of the vertices of G with four colors, vertices connected by edges colored differently. These colorings are different on C^*.

Mathematics Subject Classification: 05C15

Definitionen, Bezeichnungen, Satz

Begriffe, die hier nicht erklärt werden, sind immer im Sinne von WAGNER Graphentheorie [1] zu verstehen. Dieses Buch wird mit [W, Seitenzahl] zitiert.

Im weiteren werden nur ebene, zusammenhängende, schlichte Graphen betrachtet.

Mit (E, E') sei die Kante, die E mit E' verbindet, bezeichnet.
|G| = Anzahl der Ecken. Graph G - Ecke E ist der Graph G ohne E und ohne alle mit E inzidenten Kanten, [W, 22]. In Analogie zum Grad $\gamma(E, G)$ einer Ecke E ∈ G [W, 11] bezeichne $\gamma(V, G)$ die Anzahl der Kanten eines Weges $V \in G$ [W, 30]. Wenn innerhalb (oder außerhalb) eines geschlossenen Weges V (geschlossener Weg ist ein Kreis) keine Ecke und keine Kante von G liegt, so heißt V Vieleck.
$\gamma(G) = \max \gamma(V)$, V Vieleck von G, heißt der Grad von G. G heißt maximal, wenn $\gamma(G) = 3$, d.h. wenn alle Vielecke von G Dreiecke sind.

Ein Graph G heißt fastmaximal, wenn für alle Vielecke V bis auf höchstens eins (etwa V^*) von G gilt γ(V) = 3 und $\gamma(E \in G) \geq 3$. Die Ecken von V^* heißen Randecken von G.

Für ein Rad R bezeichnet der Grad $\gamma(R)$ die Anzahl der Ecken auf dem Rand, also $\gamma(R) = |R| - 1$. R_i bezeichnet das Rad mit $\gamma(R) = i$.

Unter einer n-farbigen Färbung, n ∈ N eines Graphen G verstehen wir eine Abbildung f der Menge der Ecken von G in { 1, 2, ... , n}. Eine Färbung heißt zulässig, wenn für die Ecken E, E' jeder Kante gilt: f(E) ≠ f(E').

4-farbige, zulässige Färbungen werden im folgenden kurz Färbungen genannt, andere Färbungen werden nicht betrachtet.

Satz
Jeder fast-maximale Graph G besitzt mindestens $2^{\gamma(G)-3}$ Färbungen.
Diese unterscheiden sich auf dem Rand von G.