# Ausschreibung eines wissenschaftlichen Preises

Lorenz Friess

Zusammenfassung

Eine Menge M ebener Graphen wird definiert. Preisfrage: ist jeder ebene Graph Teilgraph eines Graphen der Menge M?

Abstract

A set M of planar graphs is defined. Prize Question: is every planar graph subgraph of a graph of the set M?

Mathematics Subject Classification: 05C15

## Definitionen

Es werden nur endliche, ebene, zusammenhängende, schlichte Graphen betrachtet.

|G| = Anzahl der Ecken von G. Für eine Ecke E bezeichnet $\gamma(E)$ die Anzahl der mit E inzidenten Kanten. Ein (ebener) Graph heißt Dreiecksgraph wenn jedes seiner Gebiete durch einen $K_3$ berandet ist.
Ein Graph heißt fm Graph (oder ist fm Graph) wenn jedes seiner Gebiete bis auf genau eins - sagen wir F - durch einen $K_3$ berandet ist und für jede innere Ecke E (Ecke nicht auf dem Rand von F) gilt $\gamma$(E) ≥ 4. Den Rand von F nennen wir Rand von G. Die Anzahl der Ecken des Randes von G wird mit $\gamma(G)$ bezeichnet.
Für einen Dreiecksgraphen G wird $\gamma(G) = 3$ definiert.

## Definition Rad

Ein Rad ist ein (ebener, schlichter) Graph, der aus einem Kreis K (|K| ≥ 3) besteht sowie einer weiteren Ecke die mit allen Ecken des Kreises inzident ist.

Für ein Rad R ist $\gamma(R)$ die Anzahl der Ecken auf dem Rand, also $\gamma(R) = |R| - 1$.
$R_i$ bezeichne das Rad mit $\gamma(R_i) = i$. $R_i$ mit $i \geq 4$ sind fm Graphen.

## Definition $G = G_1 + K$

$G_1$ sei ein fm Graph (also $\gamma(G_1) \geq 4$, $G_1$ ist kein Dreiecksgraph). Es seien $E_1, E_2, E_3$ drei nebeneinanderliegende Ecken des Randes von $G_1$ (in dieser Reihenfolge, d.h. $E_2$ liegt zwischen $E_1$ und $E_3$) und es sei $\gamma(E_2) \geq 4$. Werden $E_1$, $E_3$ durch eine Kante K verbunden (derart, dass der entstehende Graph planar ist), so wird der dadurch entstehende Graph $G$ mit $G_1 + K$ bezeichnet, $G = G_1 + K$. $E_2$ fällt nach innen, d. h. ist keine Randecke mehr. ($\gamma(G) = \gamma(G_1) - 1$; $G$ ist ein fm Graph wenn $\gamma(G_1) \geq 5$, ein Dreiecksgraph wenn $\gamma(G_1) = 4$).
Dieses Anfügen einer Kante an einen Graphen nennen wir Op1.
Bemerkung: Ist G ein Rad so ist Op1 nicht möglich, da G + K eine innere Ecke E mit $\gamma(E) = 3$ besitzt.

## Definition $G = G_1 + G_2$

$G_1, G_2$ seien fm Graphen, $\gamma(G_i) = g_i$, ($g_i \geq 4$), i = 1, 2. Werden $k \geq 3, k \leq \min(g_1, g_{2)}$ nebeneinanderliegende Randecken von $G_1$ mit k ebensolchen von $G_2$ identifiziert, (in der sinnvollen Reihenfolge) wird der dadurch entstehende Graph mit $G_1 +_k G_2$ bezeichnet, oder einfach $G_1 + G_2$ wenn es im jeweiligen Zusammenhang nicht auf den Wert von k ankommt. $\gamma(G) = g_1 + g_2 - 2k + 2$. (Für $g_1 = g_2$ muß $k < g_1$ sein, sonst ist G nicht schlicht.) G ist fm Graph.

Dieses Zusammenfügen zweier Graphen nennen wir Op2.

**Definition M**

$M_1 = \{\ R_4, R_5, \cdots\ \}$

$M_i' = \{$ G | G= $G_1 + G_2$; $G_1, G_2 \in M_{i-1}\ \} \cup$
$\{$ G | G = $G_1$ + K, G = $G_1$ + K + K, ... soweit sinnvoll; $G_1\ \in\ M_{i-1}$ $\}$, i=2, 3, ...

$M_i = M_{i-1} \cup M_i'$, i=2, 3, ...
Alle $G \in M_i$ sind fm Graphen oder Dreiecksgraphen.

$M = \bigcup M_i$, alle i.

In Worten: M ist die Menge aller Graphen, die man erhält - ausgehend von $M_1$ - durch Anwenden der Operationen Op1 und Op2 beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge (soweit sinnvoll).

Aussage 1: Sei G' ein Dreiecksgraph, $\gamma(E) \geq 4$ für alle $E \in G'$, dann gilt: G' ist Teilgraph eines Graphen $G \in M$.

Aussage 2: Jeder ebene Graph G', $\gamma(E) \geq 4$ für alle $E \in G'$ ist Teilgraph eines Graphen $G \in M$.

Aussage 1 und Aussage 2 sind äquivalent.

Preisgeld: für den Beweis der Aussage 1 oder die Angabe eines Graphen, für den diese Aussage nicht gilt, ist ein Preisgeld von Euro 1000.- (Euro eintausend) ausgelobt.
Bei mehreren Einsendungen ist der Zeitpunkt des Eingangs bei mir entscheidend.
Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.
Maßgeblich ist der Text "Ausschreibung" unter www.lorenz-friess.de in Verbindung mit dem Text "Hinweise zur Ausschreibung".
Einsendungen an fmgraphen@lorenz-friess.de

Ulm, Januar 2015