Anschluß Bogen

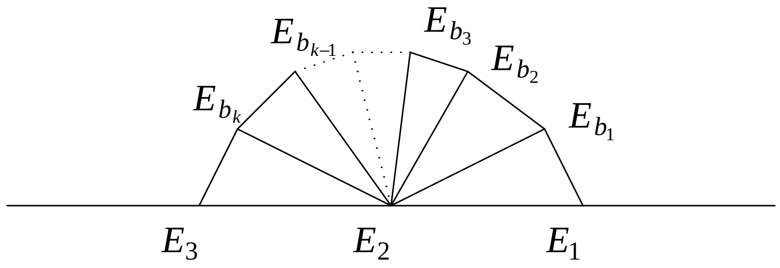


Fig Bogen

Dargestellt ist ein Bogen der Länge k.
Gegeben sei ein fm Graph G mit Färbungsschema FS(G). Der Bogen wird wie dargestellt an G angeschlossen.
Wir betrachten einen Block zu einem Element der Spalte von E_1:

E_1	E_2	E_3
		1
	2	
		4
1		
		1
	4	
		2

Wir zeigen nun die FS zu den Graphen, die wir erhalten indem wir die Ecken des Bogens der Reihe nach anschliessen, also G + E_{b_1}, G + E_{b_1} + E_{b_2}, ...

E_1	E_{b_1}	E_2	E_3	als Liste			
	3		1	1	3	2	1
		2		1	4	2	1
	4		4	1	3	2	4
				1	4	2	4
1				1	3	4	1
	3		1	1	2	4	1
		4		1	3	4	2
	2		2	1	2	4	2

Nach dem Anschluß der zweiten Ecke des Bogens haben wir als FS

E_1	E_{b_1}	E_{b_2}	E_2	E_3
		1		
	3			1
		4		
			2	
		1		
	4			4
		3		
1				
		...		
			...	
		...		

Die Darstellung der unteren Hälfte können wir uns sparen (vertausche 2 und 4).

		1		
	3			1
		1		
	4			
		3		
			2	
		1		
	3			
		4		
		1		
	4			4
		3		
1				

Zwischen den Spalten von E_1 und E_2 sehen wir jetzt ein "ganz normales" FS, sozusagen ein lokales FS, wobei die Ecken E_1 und E_2 mit ihren Farben die analoge Rolle spielen wie die Farben der Ecken einer Basisseite.

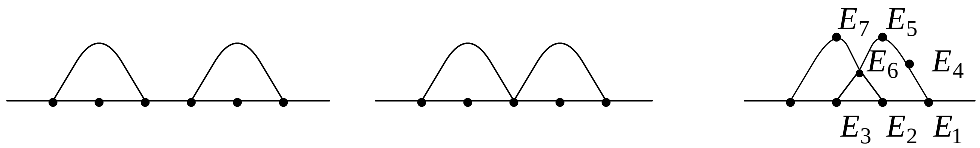
Interessant wird der Anschluß der letzten Ecke des Bogens, da für diese die zulässigen Farben von den Farben von drei Ecken abhängen. Wir erhalten - wie zu erwarten - gekoppelte Spalten.

Die behauptete Anzahl auf dem Rand verschiedener Färbungen ist gegeben.
Es handelt sich gemäß Konstruktion um lauter zulässige Färbungen.

In diesem FS kommen als Blöcke nicht nur die bekannten Typen vor. Solche FS würden den weiteren Beweis komplizierter machen, deshalb erfolgt der Anschluß eines Bogens nur wenn die Ecken des Bogens auf dem Rand des letztendlich zu färbenden Graphen G liegen, d.h. wenn keine Ecke des Bogens durch den Anschluß weiterer Ecken nach innen fällt.

Bemerkung:
Natürlich ist ein Bogen ein Rad mit E_2 als Nabe. Die Färbungen für E_2 stehen aber schon fest. Um statt des Bogens ein Rad mit E_2 als Nabe anschließen zu können, müßte man die Konstruktion des Graphen zum Teil rückgängig machen (soweit, daß E_2 noch nicht angeschlossen ist), dies möchten wir vermeiden.

Bei mehreren Bögen auf dem Rand gibt es nichts prinzipiell Neues wenn sich die Bögen nicht überlappen.



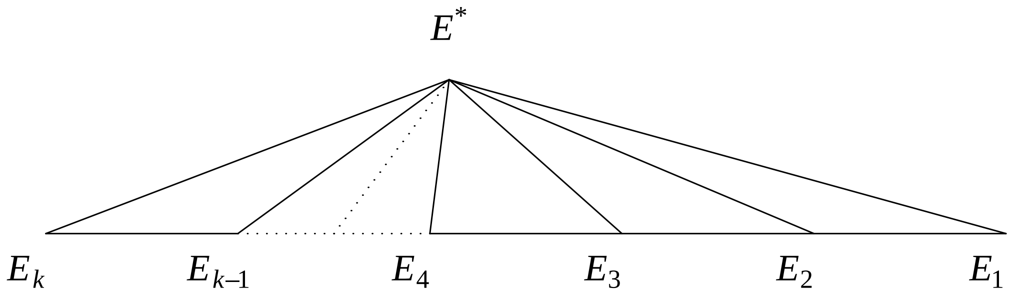
Im dritten Beispiel überlappen sich zwei Bögen. Auch hier können wir die behaupteten Färbungen konstruieren:

E_1	E_4	E_5	E_2	E_3	E_1	E_4	E_5	E_6	E_7	E_3
		1					1	4, 3		
	3			1		3				1
		4					4	3		
			2							
		1					1	3		
	4			4		4				4
		3					3	1		
1					1					
		2					2	3		
	3			1		3				1
		1					1	2, 3		
			4							
		2					2	3, 1		
	1			2		1				2
		3					3	1		

Die Spalte für E_7 überlassen wir dem Leser. (Danke)

Das FS wird wieder kompliziert und diese Konstruktion wird nur verwendet, wenn die Ecken der Bögen auf dem Rand (von G) bleiben. (Wenn sie durch weitere Anschlüsse nach innen fallen ist der Anschluß eines Rades möglich.)

Anschluß Ecke Grad k



Dargestellt ist eine Ecke E^*, die durch Kanten mit k Ecken eines fm Graphen verbunden wird.

Es interessiert nur $k \geq 3$; der Fall $k = 2$ ist der Anfang eines Bogens.

Dieser Anschluß ist nur zu betrachten für den Fall, daß E^* auf dem Rand des zu färbenden Graphen liegt, d.h. nicht nach weiteren Anschlüssen nach innen fällt.

Wir betrachten das FS(G), und zwar die drei Spalten zu den Ecken E_1, E_2, E_3, davon einen Block. Für alle anderen Blöcke verläuft die Konstruktion der Färbungen analog.

Im allgemeinen sind die Spalten der Ecken E_1 usw. länger, aber alle Blöcke zu jeweils 4 Färbungen sehen im Prinzip gleich aus.

E_1	E_2	E_3		E_1	E^*	E_3
		1			4, 3	1
	2					
		4			3	4
1			wird zu	1		
		1			2, 3	1
	4					
		2			3	2

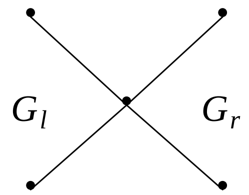
E^* hat also die gleiche Länge wie E_3. In der Spalte jeder weiteren Ecke $(E_4, \ldots, E_k)$, die mit E^* verbunden wird, werden die Farben, die wegen der jeweiligen Farbe von E^* nicht zulässig (da gleich) sind, gestrichen, also maximal jede zweite. Dadurch hat diese Ecke dann die Länge von E^* und dabei fallen $E_4, \ldots, E_{k-1}$, nach innen. Wir haben schließlich die behaupteten Färbungen (mindestens) für den Rand von $G + E^*$ mit zwei gekoppelten (d. h. gleich langen) Spalten für E^*, E_k.

Bemerkung: Obiges FS in der Mitte legt es nahe für $f(E^*) = 3$ zu wählen und zu zeigen, daß es auf dem Rand von $G + E^*$ die behauptete Anzahl sich unterscheidender Färbungen gibt. Dies ist aber nicht unbedingt richtig: Zeile 1 und Zeile 3 sind mit dieser Färbung für E^* (zunächst lokal) gleich und daher kann es Färbungen geben, die auf dem ganzen Rand von $G + E^*$ gleich sind.

Spezialfälle

Einfache Beispiele zeigen, daß nicht alle plättbare Graphen zu K gehören. Wir betrachten Beispiele.

Beispiel 1

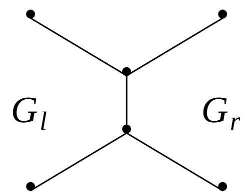


Es seien $G_l \in K$ und $G_r \in K$, mit einer gemeinsamen Ecke bilden sie G (G ist kein i-Graph). Mit $g = \gamma(G), g_l = \gamma(G_l), g_r = \gamma(G_r)$ ist $g = g_l + g_r$ - 1. Die Anzahl der Färbungen für G, die sich auf dem Rand von G unterscheiden, ergibt sich zu

$2^{g_l-3} * 2^{g_r-3} * 3! > 2^{g_l+g_r-1+3} = 2^{g-3}$

da wir drei Farben auf G_l unabhängig von den Farben von G_r permutieren können; eine Farbe ist durch die gemeinsame Ecke definiert.

Beispiel 2



Es seien $G_l \in K$ und $G_r \in K$, mit zwei gemeinsamen Ecke bilden sie G (G ist kein i-Graph). Mit $g = \gamma(G), g_l = \gamma(G_l), g_r = \gamma(G_r)$ ist $g = g_l + g_r$ - 2. Die Anzahl der Färbungen ist analog

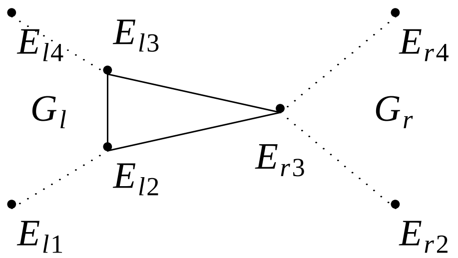
$2^{g_l-3} * 2^{g_r-3} * 2 = 2^{g_l+g_r-2-3} = 2^{g-3}$.

da wir zwei Farben auf G_l unabhängig von den Farben von G_r permutieren können. Zwei Farben sind durch die gemeinsamen Ecken definiert.

Die Graphen G in Beispiel 1 bzw. 2 haben eine trennende Eckenmenge [W, 72], mit 1 bzw. 2 Ecken, (deshalb kein i-Graph.) Die Färbungen unterscheiden sich auf dem Rand von G, sind aber nicht zu einem FS geordnet.

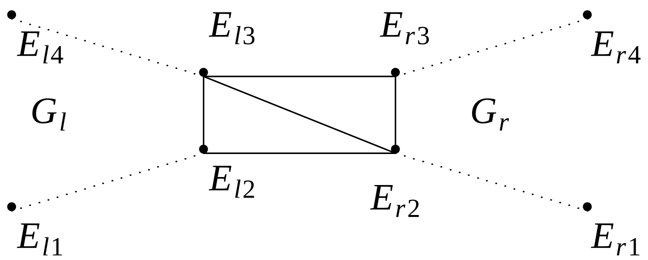
Weitere Beispiele

Beispiel 3



Es seien $G_l \in K$ und $G_r \in K$ mit FS, G wie abgebildet, G ist kein i-Graph. (Es ist nicht $G = G_l + G_r$ im Sinne unserer Definition für "+".) Mit $g = \gamma(G), g_l = \gamma(G_l), g_r = \gamma(G_r)$ ist $g = g_l + g_r$. Die Anzahl der Färbungen für G ergibt sich zu
$2^{g_l-3} * 2^{g_r-3} * 2 * 3! > 2^{g_l+g_3-6} * 2^3 = 2^{g-3}$ folgender maßen:
für E_{r_3} sind zwei Farben möglich: $f(E_{r3}) \neq f(E_{l2}), f(E_{r3}) \neq f(E_{l3})$, die drei anderen Farben können wir auf G_r permutieren unabhängig von den Färbungen von G_l.

Beispiel 4



Es seien $G_l \in K$ und $G_r \in K$ mit FS, mit zwei gemeinsamen Ecke bilden sie G (G ist kein i-Graph). Mit $g = \gamma(G), g_l = \gamma(G_l), g_r = \gamma(G_r)$ ist $g = g_l + g_r$. Die Anzahl der Färbungen ist
$2^{g_l-3} * 2^{g_r-3} * 2 * 2 * 2 = 2^{g-3}$.
Für E_{r_2} sind zwei Farben möglich ($\neq f(E_{l2}), \neq f(E_{l3})$), dann sind für E_{r3} wiederum zwei Farben möglich ($\neq f(E_{r2}), \neq f(E_{l3})$), und dann können wir die zwei Farben verschieden von $f(E_{r2}), f(E_{r3})$ auf E_r permutieren.