Anschluß Kante an fm Graph

Wir betrachten das Rad R_n. Für den Graph, der entsteht durch das Anfügen einer Kante von E_i nach E_{i+2}, i= 2, ..., n-2, haben wir wieder ein FS mit denselben Eigenschaften. Dazu betrachten wir als Beispiel FS(R_6) und verbinden E_4 mit E_6. Färbungen, für die die Ecken E_4 und E_6 die gleiche Farbe haben, sind unzulässig und entfallen, als FS haben wir:

E_1	E_2	E_4	E_6	E_7
			4	2
		1		
			2	4
1	2			
			1	4, 2
		4		
			2	4

also gleich FS(R_5).

Der Anschluß einer solchen Kante ist trivial (im Sinne des Färbungsproblems), da eine innere Ecke - nämlich E_{i+1}, im obigen Beispiel E_5 - vom Grad 3 entsteht. Dieses Beispiel dient nur als Illustration der Eigenschaften von FS. Wenn wir - als weiteres Beispiel - am Rad R_6 eine Kante von E_5 nach E_7 anfügen erhalten wir als FS:

E_1	E_2	E_4	E_5	E_7	(Perm)	E_1	E_2	E_4	E_5	E_7
			2	4					4	2
		1						1		
			4	2					2	4
1	2				(2, 4)	1	4			
			2	4					4	2
		4						2		
			1	2, 4					1	4, 2

also FS(R_5). Dazu noch die Kante von E_2 nach E_5 gibt das FS

E_1	E_2	E_5	E_7
		4	2
1	2		
		1	4, 2

Das ist gleich dem FS von R_4.

Da man sich ein FS aus Blöcken - wie oben dargestellt - zusammengesetzt denken kann, braucht man sich für das Anfügen einer Kante von einer Ecke zur übernächsten Ecke nur anzusehen was mit den Färbungen, die durch diese Blöcke beschrieben werden, passiert wenn die unzulässigen Färbungen (für die die beiden Ecken dieselbe Farbe haben) gestrichen werden: die Färbungen können wieder durch die Blöcke beschrieben werden.

Wir betrachten als weiteres Beispiel $FS(R_7)$ und den Fall, daß eine Kante von E_5 nach E_7 angefügt wird. Als FS haben wir dann:

E_1	E_2	E_4	E_5	E_7	E_8	(Perm)	E_4	E_5	E_7	E_8
				4	2					
			2							
				1	2, 4					
		1								
				2	4					
			4							
				1	4, 2					
1	2									
				1	4, 2				2	4, 1
			2					1		
				4	2				4	1
		4				(1, 2)	4			
				2	4				1	4
			1					2		
				4	2				4	1

Aus zwei zusammengehörenden Blöcken, beide Typ I wird Typ IV, aus zwei zusammengehörenden Blöcken Typ I und Typ IV wird Typ I.

Typ IV tritt nur zusammen mit Typ I auf, d. h. nur in FS mit entsprechend großer Anzahl an Färbungen (Graph mit entsprechend vielen Randecken).

Definition fm Graph mit FS
Ein fm Graph G heißt Graph mit FS wenn es zu jeder Kante des Randes als Basisseite ein FS gibt und jedes FS von der beschriebenen Struktur ist, wenn also FS(G, γ(G) = n) = FS(R_n).

Räder sind fm Graphen mit FS (Lemma 1).

Definition Anschluß einer Kante an fm Graph
Sei G ein fm Graph, $\gamma(G) \geq 4$. Wird eine Kante K von einer Randecke zur übernächsten Randecke (im Sinne der Orientierung) hinzugefügt, nennen wir das "Anschluß einer Kante" und schreiben H = G + K.
H ist (offenbar) fastmaximal.

Lemma 2
Sei G ein fm Graph mit FS und sei H = G + K. ($\gamma(G)$ = n >= 4)
Dann ist H ein Graph mit FS.

Beweis:
Zu zeigen: zu beliebig gewählter Basisseite von H gibt es FS (für H). Für das folgende werden die Randecken von G fortlaufend (im Sinne der Orientierung des Randes) numeriert beginnend mit 1, 2 für die Ecken der (beliebig gewählten) Basisseite.
Wir unterscheiden vier Fälle für die Lage von K relativ zur Basisseite.

1. K verbindet $E_i, E_{i+2}, i \geq 2, i \leq n-3$.
Wir betrachten für $E_i, E_{i+1}, E_{i+2}, E_{i+3}$ die möglichen Blöcke im FS. Nach dem Anschluß von K fällt E_{i+1} nach innen (d. h. liegt nicht auf dem Rand von H und deshalb gibt es im FS(H) zu dieser Ecke keine Spalte).
Die Färbungen, für die $f(E_i) = f(E_{i+2})$ ist, werden gestrichen und wir haben das FS für H:

E_i	E_{i+1}	E_{i+2}	E_{i+3}		E_i	E_{i+2}	E_{i+3}
			2				
		1					
			4				
	2						
			2				4
		4				2	
			1				1
1					1		
			4				2
		1				4	
			2				1
	4						
			4				
		2					
			1				

2. K verbindet E_1, E_3, dabei fällt E_2 nach innen. Wir betrachten den entsprechenden Teil des FS von G, $\gamma(G) > 5$.

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5		E_1	E_3	E_4	E_5
				1					
			2						
				4					
		1							
				1					4
			4					2	
				2					1
1	2					1	4		
				4					4
			2					1	
				1					2
		4							
				4					
			1						
				2					

Für H haben wir wieder ein FS. Die Ecken E_1 und E_3 der Basisseite haben jetzt die Farben 1 und 4 statt 1 und 2. Durch Permutation (2, 4) haben wir die "alten" Blöcke.

Ist $\gamma(G) = 5$ dann sind E_4, E_5 gekoppelt und wir bekommen nach Anschluß der Kante FS(H)=FS(R_4).

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5		E_1	E_3	E_4	E_5
			2	4					
		1						2	4
			4	2					
1	2					1	4		
			2	4					
		4						1	2, 4
			1	2, 4					

Ist $\gamma(G) = 4$ dann sind E_3, E_4 gekoppelt und wir bekommen nach Anschluß der Kante FS(H)=FS(R_3).

E_1	E_2	E_3	E_4		E_1	E_3	E_4
		1	4, 2				
1	2				1	4	2
		4	2				

3. K verbindet E_{n-1}, E_1. E_{n-1} und E_n sind gekoppelt, wir betrachten die entsprechenden möglichen Blöcke im FS und die Färbungen nach Anschluß der Kante und nach Streichen der dadurch unzulässigen Färbungen.

E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_1	E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_1
		2	4					
	1					1	2, 4	
		4	2					
2					2			
		2	4					
	4					4	2	
		1	2, 4					
				1				1
		4	2					
	1					1	4, 2	
		2	4					
4					4			
		4	2					
	2					2	4	
		1	4, 2					

E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_1	E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_1
		2	4					
	4					4	2	
		1	2, 4					
2					2			
		2	4					
	1					1	2, 4	
		4	2					
				1				1
		1	2, 4					
	4					4	2	
		2	4					
1					1			
		1	4, 2					
	2					2	4	
		4	2					

Das Ergebnis ist ein Block vom Typ IV bzw. Typ I, vgl. S. 3.4.

4. K verbindet E_n, E_2, $\gamma(G) > 5$. Als mögliche Blöcke vor und nach dem Anschluß der Kante haben wir, wenn zwei Blöcke vom Typ I zusammengehören, d. h. wenn $f(E_{n-4}) = 1$. Rechts nur noch die zulässigen Färbungen, d.h. $f(E_n) \neq f(E_2)$. E_1 fällt nach innen, daher keine Spalte:

E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_1	E_2	E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_2
		2	4							
	1						1	2		
		4	2							
2				1	2	2			4	2
		2	4							
	4						4	2, 1		
		1	2, 4							
		4	2							
	1						1	2		
		2	4							
4				1	2	4			4	2
		4	2							
	2						2	1		
		1	4,2							

Insgesamt steht jetzt rechts ein Block vom Typ I:

E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_2
	1	2		
2				
	4	1,2		
			4	2
	1	2		
4				
	2	1		

Wenn ein Block vom Typ I und ein Block vom Typ IV zusammengehören d. h. wenn $f(E_{n-4}) = 4$ (oder $f(E_{n-4}) = 2$, dann im folgenden 2 und 4 vertauschen) erhalten wir:

E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_1	E_2	E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_2
		2	4							
	1						1	2		
		4	2							
2				1	2	2			4	2
		2	4							
	4						4	2, 1		
		1	2, 4							
		1	2, 4							
	4						4	1, 2		
		2	4							
1				1	2	1			4	2
		1	4,2							
	2						2	1		
		4	2							

Insgesamt steht jetzt rechts ein Block vom Typ IV:

E_{n-3}	E_{n-2}	E_{n-1}	E_n	E_2
	1	2		
2				
	4	1,2		
			4	2
	4	1, 2		
1				
	2	1		

Für alle Färbungen ist $f(E_n) = 4$. E_n hat im FS sozusagen die Rolle von E_1, daß nämlich nur eine Farbe möglich ist. E_1 liegt innen, es gibt wieder zwei benachbarte Ecken auf dem Rand des Graphen, die bei allen Färbungen immer dieselbe Farbe haben, die Ecken der Basisseite.

Die Fälle $\gamma(G) = 5$ und $\gamma(G) = 4$.

Ist $\gamma(G) = 5$ ist das FS von G, (Kante E_2, E_5):

E_3	E_4	E_5	E_1	E_2
	2	4		
1				
	4	2		
			1	2
	2	4		
4				
	1	4, 2		

E_3	E_4	E_5	E_2
1	2		
		4	2
4	1, 2		

Ist $\gamma(G) = 4$ ist das FS von G, (Kante E_2, E_4):

E_3	E_4	E_1	E_2
1	4, 2		
		1	2
4	2		

E_3	E_4	E_2
1	4	2

Wir bekommen so zu jeder Randkante als Basisseite von H = G + K ein FS (einschließlich für K selbst als Basisseite) indem wir die Basisseite von G geeignet wählen.