Anschluß Rad an fm Graph

Definition: Anschluß Rad an fm Graph

Sei G ein fm Graph, R_r ein Rad. Unter dem Anschluß von R_r an G verstehen wir: es werden k (Rand-) Ecken von R_n mit Randecken von G identifiziert und zwar lückenlos wie in Fig 4 ersichtlich, dadurch entsteht der Graph $G + R_r$. Den Graph G stelle man sich in Fig 4 "unter" E_1, E_2, ..., E_{g_1} , E_{g_2} , ..., $E_{g_{k-1}}$, E_{g_k}, ..., E_{n-1}, E_n vor.
E_1, E_n sind durch eine Kante - nicht dargestellt - verbunden.

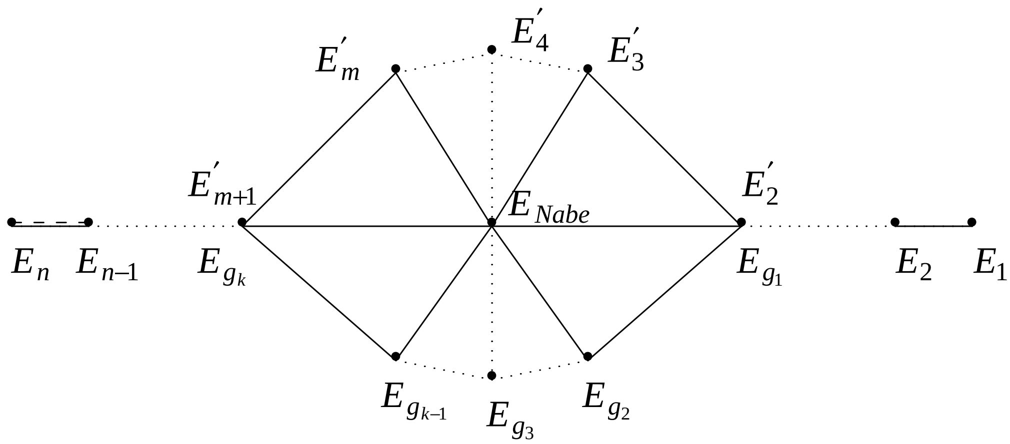


Fig 4

Es bezeichnen E_1 , ..., E_n die Ecken vom Rand von G, (E_1, E_2) die Basisseite von G, $E_n E_{n-1}$ die gekoppelten Ecken von G. E_1', ..., E_r' bezeichnen die Ecken vom Rand von R_r. Die Numerierung erfolgt so, daß $E_3', \ldots, E_m'$ die Ecken von R_r sind, die nicht mit Ecken von G identifiziert werden, E_2', ..., E_{m+1}' die Ecken von R_r sind, die auf dem Rand von $G + R_r$ liegen, also $\gamma(R_r) = r = m + k - 2$. E_{g_1}, ..., E_{g_k} bezeichnen die Ecken von G, die mit Ecken von R_n identifiziert werden, nämlich E_2' mit E_{g_1}, E_1' mit E_{g_2}, E_{m+1+i}' mit $E_{g_{k-i}}$, i=0, ..., k-3.

Als Bezeichnung: werden zwei Ecken bei einem Anschluß E_a, E_b identifiziert, sei dies kurz mit E_a id E_b oder einfach mit $E_a = E_b$ bezeichnet.

R_r wird mit $k \geq 3$ Ecken an G angeschlossen.
$m \geq 2$. Der Fall m = 2 bedeutet, daß alle Randecken von R_r mit Ecken von G identifiziert werden. Es gilt: $\gamma(R_r)$ = r = m + k - 2; m = r - k + 2;
$\gamma(G + R_r)$ = γ (G) + (m-2) - (k-2) = $\gamma(G) + m - k$.

Lemma 3 Sei G ein fm Graph mit FS. Dann ist $H = G + R_r$ ein fm Graph mit FS.

Zum Beweis ist zu zeigen: zu beliebiger Kante des Randes von H (als Basisseite) gibt es FS. Das zeigen wir durch Konstruktion.

Als Basisseite von H sind die (Rand-)Kanten von G und R_n möglich soweit sie auf dem Rand von H liegen, d. h. beim Anschluß von R_r an G nicht nach innen fallen.

Zunächst sei als Basisseite von H eine Kante K von G gewählt, die nach dem Anschluß von R_r auf dem Rand von H liegt.

(Der Fall, daß wir eine Kante von R_r als Basisseite von H wählen, erledigt sich von alleine, s.u.)

Dann gibt es - nach Voraussetzung - für G ein FS mit K als Basisseite.

Die Ecken des Randes von G werden so numeriert (wie immer aufsteigend in Richtung der Orientierung des Randes), daß E_1, E_2 die Ecken der Basisseite von G sind.
Abhängig von der Lage der Basisseite (E_1, E_2) relativ zur Lage von R_r gibt es folgende Fälle (die Randecken von R_r werden mit E'_1, ..., E'_r bezeichnet):

E'_2 id E_2, E'_{m+1} id E_{g_k} (= E_{k+1})
E'_2 id E_3, E'_{m+1} id E_{k+2}
...
E'_2 id E_{n-k}, E'_{m+1} id E_{n-1}
E'_2 id E_{n-k+1}, E'_{m+1} id E_n
E'_2 id E_{n-k+2}, E'_{m+1} id E_1
Die Anzahl der Fälle ist gleich der Anzahl der Kanten von G, die nach Anschluß auf dem Rand von H liegen, das ist n - k + 1.
Für R_r wählen wir als Basisseite die Kante $(E_{g_2}, E_{g_1}) = (E'_1, E'_2)$. (Fig 4)

Bei der Konstruktion des FS(H) werden verschiedene Fälle betrachtet:
(a) die mögliche Lage der Basisseite, s. o.
(b) Anzahl der Ecken von G, die mit Ecken von R identifiziert werden.
In allen Fällen wird das FS von H in folgenden drei Schritten konstruiert:
(1) Für $E_1, \ldots, E_{g_1}$ wird das FS von G als Anfang des FS von H übernommen.
(2) Für $E'_3, \ldots, E'_{m+1}$ wird der Teil des FS von R_r übernommen, der zu den Ecken von R_r gehört, die auf dem Rand von H liegen. Dabei ist zu zeigen, daß dies immer möglich ist. Dies ist immer möglich, wenn es für die Ecken von G und R_r, die identifiziert werden, in den FS von G und R_r "passende" Färbungen gibt. Der Nachweis hierfür gelingt durch die Kenntnis des Aufbaus der FS von G und R_r.
(3) Für die Ecken $E_{g_k}, \ldots, E_n$ (soweit zutreffend, d. h. auf dem Rand von H) werden Teile des FS von G übernommen, und zwar zu jedem Element in der Spalte von E_{g_k} das zugehörige TFS.

Als Spezialfall von Lemma 3 beweisen wir zunächst

Lemma 4

Sei G ein fm Graph mit FS, γ(G) = 7. Dann ist H = G + R_5 für k = 3 ein fm Graph mit FS.

Das FS(G) ist gleich dem FS(R_8).

Beweis von Lemma 4.

Zum Beweis von Lemma 4 ist zu zeigen daß H = $G + R_5$ ein fm Graph mit FS ist. H ist offenbar fm. Um zu zeigen, daß H ein Graph mit FS ist, müssen wir zeigen, daß es zu jeder Wahl einer Kante des Randes von H als Basisseite ein FS für H gibt.

Von den Randkanten von G liegen $\gamma(G)$ - k + 1 = 5 Kanten auf dem Rand von H und können Basisseite von H sein. Das sind folgende Fälle:

I	E_2 id E_2'	E_3 id E_1'	E_4 id E_5'
II	E_3 id E_2'	E_4 id E_1'	E_5 id E_5'
III	E_4 id E_2'	E_5 id E_1'	E_6 id E_5'
IV	E_5 id E_2'	E_6 id E_1'	E_7 id E_5'
V	E_6 id E_2'	E_7 id E_1'	E_1 id E_5'

Fall I. Der Anschluß von R_5 an $E_{2,}E_{3,}E_4$ ist in Fig 5 dargestellt.

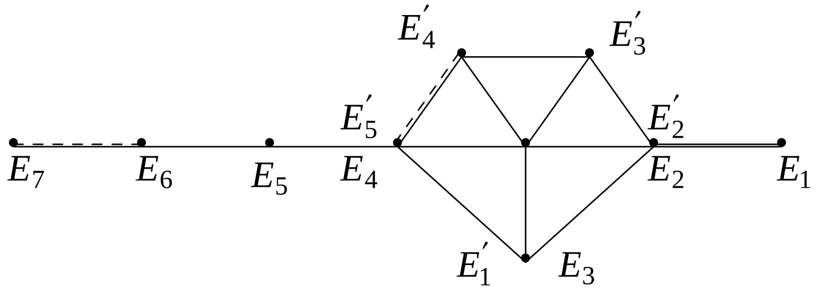


Fig 5

$E_1' = E_3$, $E_2' = E_2$, $E_4 = E_5'$. Die Kante (E_1, E_7) ist nicht dargestellt. Kanten zu gekoppelten Ecken sind gestrichelt markiert.

Konstruktion des FS(H).
Als Basisseite des R_5 wählen wir $(E_1^{'}, E_2^{'})$, $E_1^{'} = E_3, E_2^{'} = E_2$. In Abhängigkeit von der Farbe von $E_3 = E_1^{'}$ haben wir je ein FS für R_5.

$f(E_1^{'}) = 1$

$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			2	4
		4		
			1	2, 4

$f(E_1^{'}) = 4$

$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$
			2	1
		1		
			4	2, 1
4	2			
			2	1
		4		
			1	2

Damit wir ein FS für H erhalten, muß bei der Konstruktion der Block des FS(R), der die Kopplung $E_3^{'}, E_4^{'}$ beschreibt, durch einen Block ohne Kopplung ersetzt werden (in einem FS sind nur die beiden letzten Ecken gekoppelt, in H also E_6, E_7 und für diese Ecken haben wir die Kopplung des FS(H) per Konstruktion, s.u.).

Die Spalte zu E_1, mit $f(E_1) = 1$, ist im folgenden nicht dargestellt.

Das FS von G wird nun umgeschrieben als Tabelle und die passenden Färbungen des R_5 werden eingefügt. Aus Platzgründen zunächst die obere Hälfte des FS von G, d. h. $f(E_3) = 1$. Man beachte die Reihenfolge von E_2, E_3.

E_3	E_2			E_4	E_5	E_6	E_7	
E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'				Zeile
1	2	1	2	4	1	4	2	(1)
					1	2	4	(2)
					2	4	2	(3)
					2	1	4, 2	(4)
			4	2	1	2	4	(5)
					1	4	2	(6)
					4	2	4	(7)
					4	1	2, 4	(8)
		4	2	4	1	4	2	(9)
					1	2	4	(10)
					2	4	2	(11)
					2	1	4, 2	(12)
			1	2	1	2	4	(13)
					1	4	2	(14)
					4	2	4	(15)
					4	1	2, 4	(16)
			1	4	1	4	2	(17)
					1	2	4	(18)
					2	4	2	(19)
					2	1	4, 2	(20)

Zur Übersichlichkeit wurden Farben in den ersten fünf Spalten nur eingetragen, wenn die Farbe eine andere ist als in der Zeile darüber.

Die Zeile 1 2 4 1 2, 4 im FS von R_5 wird zu zwei Zeilen (wegen der verschiedenen Fortsetzungen, die abhängen von 2 und 4 als Farbe von E_4).

Die Farben für E_5, E_6, E_7 hängen nur von $f(E_4)$ ab und zu jedem Wert von $f(E_4)$ bilden sie einen Block. (Für γ(G) > 7 ein TFS.) Die Spalten hätten wir weglassen dürfen mit der Bemerkung, daß für diese Ecken die Färbungen durch entsprechende Blöcke beschrieben werden.

Nun wird die untere Hälfte des FS von G, d. h. $f(E_3) = 4$ umgeschrieben als Tabelle und die passenden Färbungen des R_5 werden eingefügt.

E_3	E_2			E_4	E_5	E_6	E_7	
E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'				Zeile
4	2	1	2	1	4	1	2, 4	(21)
					4	2	4	(22)
					2	1	4, 2	(23)
					2	4	2	(24)
			4	2	4	2	4	(25)
					4	1	2, 4	(26)
					1	2	4	(27)
					1	4	2	(28)
			4	1	4	1	2, 4	(29)
					4	2	4	(30)
					2	1	4, 2	(31)
					2	4	2	(32)
		4	2	1	4	1	2, 4	(33)
					4	2	4	(34)
					2	1	4, 2	(35)
					2	4	2	(36)
			1	2	4	2	4	(37)
					4	1	2, 4	(38)
					1	2	4	(39)
					1	4	2	(40)

Diese Tabellen umgeschrieben in ein FS ergeben, $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 2$ Teil 1, $f(E_3^{'}) = 1$.

		E_4	E_5	E_6	E_7	
$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$				von Zeile
				1	2, 4	(21)
			4			
				2	4	(22)
		1				
				1	4, 2	(23)
			2			
				4	2	(24)
	2					
				4	2	(1)
			1			
				2	4	(2)
		4				
				4	2	(3)
			2			
				1	4, 2	(4)
1						
				1	2, 4	(29)
			4			
				2	4	(30)
		1				
				1	4, 2	(31)
			2			
				4	2	(32)
	4					
				2	4	(5), (25)
			1			
				4	2	(6), (26)
		2				
				2	4	(7), (27)
			4			
				1	2, 4	(8), (28)

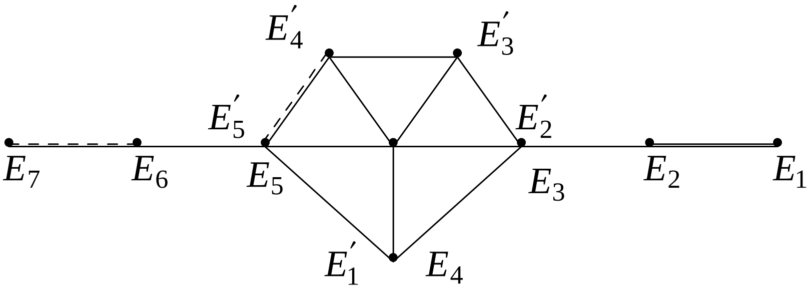
Diese Tabellen umgeschrieben in ein FS ergeben, $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 2$
Teil 2, $f(E_3') = 4$.

		E_4	E_5	E_6	E_7	
E_3'	E_4'	E_5'				von Zeile
				2	4	(9)
			1			
				4	2	(10)
		4				
				4	2	(11)
			2			
				1	4, 2	(12)
	2					
				1	2, 4	(33)
			4			
				2	4	(34)
		1				
				1	4, 2	(35)
			2			
				4	2	(36)
4						
				4	2	(17)
			1			
				2	4	(18)
		4				
				4	2	(19)
			2			
				1	4, 2	(20)
	1					
				2	4	(13), (39)
			1			
				4	2	(14), (40)
		2				
				2	4	(16), (37)
			4			
				1	2, 4	(17), (38)

Teil 1 und Teil 2 bilden zusammen ein FS(H) und dieses ist gleich $FS(R_8)$.

Wir haben oben bereits festgestellt: für E_5, E_6, E_7 haben wir immer einen Block, dessen Aufbau und Farben abhängen von $f(E_4)$. Wenn $\gamma(G) > 7$ ist haben wir für FS(H) ein TFS abhängig von $f(E_4)$ und haben somit FS(H) = FS(R_k) mit
k = γ(G) + 1.

Fall II. Der Anschluß des R_5 an E_3, E_4, E_5.



Figur 2

Die Konstruktion des FS von H verläuft analog zu Fall I.
Die als Basisseite von H gewählte Kante wird auch als Basisseite von G gewählt.

Für $E_1, \cdots, E_3$ wird für FS(H) das FS(G) übernommen.

Als Basisseite von R_5 wählen wir die Kante $(E_1', E_2') = (E_4, E_3)$.
Die möglichen Farben von E_3, E_4 entnehmen wir aus

E_1	E_2	E_3	E_4
			2
		1	
			4
1	2		
			2
		4	
			1

Die Farben von E_3 und E_4 bestimmen ein FS für R_5. Damit wird das FS von H fortgesetzt, dabei werden nur passende Färbungen verwendet, d. h. es muß $f(E_5') = f(E_5)$ sein. Das FS(H) wird für E_5, E_6, E_7 fortgesetzt mit den Blöcken des FS(G), jeweils mit dem Block, der zu $f(E_5)$ gehört ("elementweise").

Wie paßt FS(R_5) an E_3, E_4, E_5?
Wir betrachten einen Block zu E_3, E_4, E_5 im FS(G):

E_3	E_4	E_5
		1
	2	
		4
1		
		1
	4	
		2

In Abhängigkeit von $f(E_3)$, $f(E_4)$ wird ein $FS(R_5)$ zur Konstruktion des FS(H) verwendet. Aus dem Block Seite 23 ergibt sich: für $f(E_3)$, $f(E_4)$ sind möglich:
1, 2; 1, 4; 4, 2; 4, 1.
Die ersten beiden Möglichkeiten ergeben:

E_4	E_3				E_5	
$E_1^{\prime}$	$E_2^{\prime}$	$E_3^{\prime}$	$E_4^{\prime}$	$E_5^{\prime}$		Zeile
			1	4		(1)
		2				
			4	1		(2)
2	1				1 und 4	
			1	4		(3)
		4				
			2	1, 4		(4)

und

			1	2		(5)
		2				
			4	1, 2		(6)
4	1				1 und 2	
			1	2		(7)
		4				
			2	1		(8)

Die Spalte E_5 gibt die Bedingung an für f($E_5^{\prime}$). Nur die Färbungen, für die $f(E_5^{\prime}) = f(E_5)$ sind zulässig. Die von E_5 für $E_5^{\prime}$ "erlaubten" Farben hängen ab von $f(E_4)$.

Aus dieser Tabelle sind die möglichen Färbungen abzulesen. Die Farben für E_3, E_4 passen durch die Wahl des FS(R_5). Zulässig sind dann alle Färbungen, für die $f(E_5^{\prime}) = f(E_5)$ und dann sind ab E_5 alle zugehörigen Färbungen (zu dem jeweiligen Wert von $f(E_5)$) für E_6, E_7 zulässig.

Damit haben wir für das FS(H) (die Fortsetzungen für E_6, E_7 aus dem FS(G) sind hier mit eingetragen):

E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_6	E_7	von Zeile
				2	4	
			4			(1)
				1	2, 4	
		1				
				4	2	
			2			(5)
				1	4, 2	
	2					
				2	4	
			1			(2), (6)
				4	2	
		4				
				4	2	
			2			(6)
				1	4, 2	
1						
				2	4	
			4			(3)
				1	2, 4	
		1				
				4	2	
			2			(7)
				1	4 ,2	
	4					
				2	4	
			4			(4)
				1	2, 4	
		2				
				2	4	
			1			(4), (8)
				4	2	

Zu je einem Block des FS(G) (zu E_3, E_4, E_5) erhalten wir so zwei Blöcke (zu E_3', E_4', E_5') für das FS(H) mit Fortsetzungen für E_6, E_7.

Diese Fortsetzungen ergeben sich aus FS(G) zu den jeweiligen Werten $f(E_4)$, $f(E_5)$.

Die möglichen Färbungen 4, 2; 4, 1 für E_3, E_4 ergeben analog

E_4	E_3				E_5	
E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'		Zeile
			4	1		(1)
		1				
			2	4, 1		(2)
2	4				4 und 1	
			4	1		(3)
		2				
			1	4		(4)
und						
			4	2		(5)
		1				
			2	4		(6)
1	4				4 und 2	
			4	2		(7)
		2				
			1	4, 2		(8)

Damit haben wir für das FS(H) (die Fortsetzungen für E_6, E_7 aus dem FS(G) sind hier mit eingetragen):

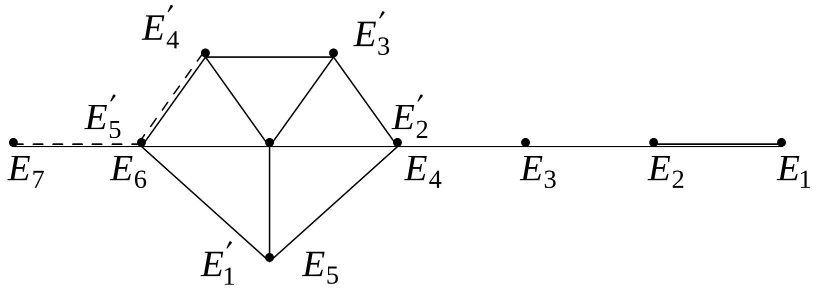
E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_6	E_7	von Zeile
				2	4	
			1			(1)
				4	2	
		4				
				4	2	
			2			(5)
				1	4, 2	
	1					
				2	4	
			1			(2)
				4	2	
		2				
				2	4	
			4			(2), (6)
				1	2, 4	
4						
				2	4	
			1			(3)
				4	2	
		4				
				4	2	
			2			(7)
				1	4 ,2	
	2					
				2	4	
			4			(4), (8)
				1	2, 4	
		1				
				1	4	
			2			(8)
				4	2	

Zu je einem Block des FS(G) (zu E_3, E_4, E_5) erhalten wir so zwei Blöcke (zu E_3', E_4', E_5') für das FS(H) mit Fortsetzungen für E_6, E_7.

Diese Fortsetzungen ergeben sich aus FS(G) zu den jeweiligen Werten $f(E_4)$, $f(E_5)$.

Damit haben wir ein FS(H).

Fall III. Anschluß R_5 an E_4, E_5, E_6



Figur 3

Die Konstruktion des FS von H verläuft analog zu Fall I.
Die als Basisseite von H gewählte Kante wird auch als Basisseite von G gewählt.
Für E_1 bis E_4 wird das FS von G übernommen.
Nun betrachten wir die möglichen Blöcke (Typen) im FS(G) für E_4, E_5, E_6, E_7.

E_4	E_5	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
		2	4			1	2, 4
	1				4		
		4	2			2	4
2				1			
		2	4			1	4, 2
	4				2		
		1	2, 4			4	2

Zunächst betrachten wir den linken Block. Die möglichen Färbungen im FS(R_5), d. h. die Färbungen für die $f(E_1') = f(E_5)$ und $f(E_2') = f(E_4)$ sind

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			1	2, 4
		4		
			2	4

und

			2	1
		1		
			4	2, 1
4	2			
			2	1
		4		
			1	2

Die Spalte E_6 gibt die Bedingung an für $f(E_5^{'})$. Es muß $f(E_5^{'}) = E_6$ sein. Für $E_5^{'}$ sind - obere bzw. untere Hälfte - nur Werte E_6 zulässig, die zu "1" bzw. "4" in Spalte E_5 gehören.

E_4	E_5				E_6	E_7
$E_2^{'}$	$E_1^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$		
			2	4		
		1				
			4	2		
					2	4
	1					
					4	2
			1	2, 4		
		4				
			2	4		
2						
			2	1		
		1				
			4	2, 1		
					2	4
	4					
					1	2, 4
			2	1		
		4				
			1	2		

Daraus lesen wir die möglichen Färbungen ab.

$E_5 = E_1'$ fällt nach innen, daher zu dieser Ecke keine Spalte im FS(H).

E_4	E_5		E_6	E_7
E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	
2	1	2	4	2
		4	2	4
	4	1	2	4
		1	4	2
		2	4	2
	1	2	1	2,4
		4	2	4
		4	1	2, 4
	4	2	1	2, 4
		1	2	4

Sortieren gibt:

E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_7
			1	2, 4
		2		
			4	2
	1			
			2	4
		4		
			1	2, 4
2				
			2	4
		1		
			4	2
	4			
			4	2
		2		
			1	2, 4

Die möglichen Färbungen können durch Blöcke beschrieben werden.

Analog für den zweiten Blocktyp im FS(G). $f(E_1^{'}) = f(E_5)$, $f(E_2^{'}) = f(E_4)$:

$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$
		1	2, 4
	4		
		2	4
1			
		1	4, 2
	2		
		4	2

Die dazu möglichen Färbungen im FS von R_5.

$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$
			1	2
		2		
			4	1, 2
4	1			
			1	2
		4		
			2	1

und

			1	4
		2		
			4	1
2	1			
			1	4
		4		
			2	1, 4

Diese Färbungen in den Block von FS(G) eingetragen:

E_4	E_5				E_6	E_7
E_2'	E_1'	E_3'	E_4'	E_5'		
			1	2		
		2				
			4	1, 2		
					1	2, 4
	4					
					2	4
			1	2		
		4				
			2	1		
1						
			1	4		
		2				
			4	1		
					1	4, 2
	2					
					4	2
			1	4		
		4				
			2	1, 4		

Daraus lesen wir die möglichen Färbungen ab.

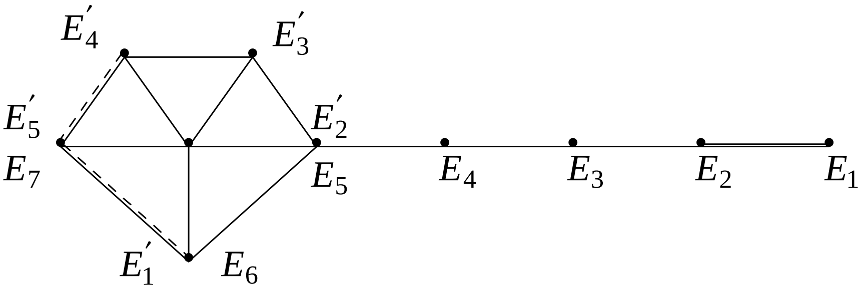
E_4	E_5		E_6	E_7
E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	
1	2	1	2	4
		4	1	2, 4
		4	2	4
		1	4	2
		4	1	4, 2
	4	1	2	4
		2	1	2, 4
		1	4	2
		2	1	4, 2
		2	4	2

Sortiert:

E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_7
			2	4
		1		
			4	2
	2			
			2	4
		4		
			1	4, 2
1				
			4	2
		1		
			2	4
	4			
			4	2
		2		
			1	2, 4

Die Färbungen werden durch Blöcke beschrieben.
FS(H) = FS(R_8).

Fall IV, Anschluß R_5 an E_5, E_6, E_7,



Figur 4

Die Konstruktion des FS von H verläuft analog zu den bisherigen Fällen. Die als Basisseite von H gewählte Kante (E_1, E_2) wird auch als Basisseite von G gewählt. Für E_1, E_2, E_3, E_5 wird für H das FS(G) übernommen.
Im FS(G) können für E_4, E_5, E_6, E_7 folgende Blöcke vorliegen:

E_4	E_5	E_6	E_7
		1	4, 2
	2		
		4	2
1			
		1	2, 4
	4		
		2	4
		2	4
	1		
		4	2
2			
		2	4
	4		
		1	2, 4
		4	2
	1		
		2	4
4			
		4	2
	2		
		1	4, 2

Für den Anschluß R_5 interessieren nur die Spalten E_5, E_6, E_7. (E_6, E_5) wird als Basisseite $(E_1^{'}, E_2^{'})$ von R_5 gewählt. Abhängig von $f(E_5)$, $f(E_6)$ gibt es die FS(R_5)

$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$
			1	4				2	4
		2					1		
			4	1				4	2
2	1				1	2			
			1	4				2	4
		4					4		
			2	1, 4				1	2, 4
			2	1				1	2
		1					4		
			4	2, 1				2	1
4	2				4	1			
			2	1				1	2
		4					2		
			1	2				4	1, 2
			4	2				4	1
		1					1		
			2	4				2	4, 1
1	4				2	4			
			4	2				4	1
		2					2		
			1	4, 2				1	4

Als mögliche Färbungen ergeben sich (zunächst alle Färbungen ohne Berücksichtigung der Bedingung $f(E_5') = f(E_7)$, die erlaubten $f(E_7)$ sind in Spalte E_7 eingetragen):

E_6	E_5				E_7
E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	
1	2	1	2	4	4, 2
		1	4	2	
		4	2	4	
		4	1	2	
		4	1	4	
2	1	2	1	4	4
		2	4	1	
		4	1	4	
		4	2	1	
		4	2	4	
4	2	1	2	1	2
		1	4	2	
		1	4	1	
		4	2	1	
		4	1	2	
4	1	4	1	2	2
		4	2	1	
		2	1	2	
		2	4	1	
		2	4	2	
1	4	1	4	2	2, 4
		1	2	4	
		2	4	2	
		2	1	4	
		2	1	2	
		2	1	2	
2	4	1	4	1	4
		1	2	4	
		1	2	1	
		2	4	1	
		2	1	4	

Die Färbungen, für die $f(E_5') = f(E_7)$:

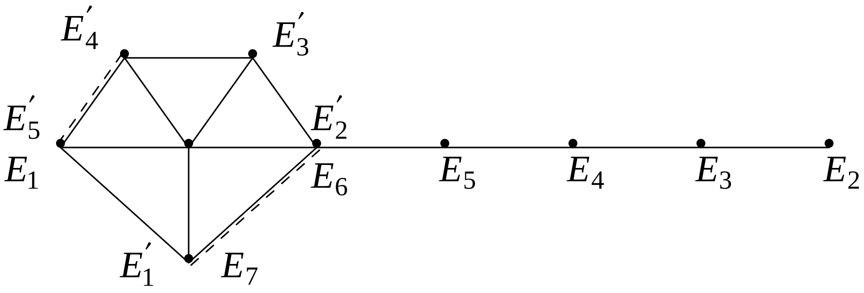
E_6	E_5			E_7
E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
1	2	1	2	4
		4	2	4
		4	1	4
		1	4	2
		4	1	2
1	4	1	4	2
		2	4	2
		2	1	2
		1	2	4
		2	1	4
2	4	1	2	4
		2	1	4
4	2	1	4	2
		4	1	2

Nach Sortierung als FS (E_1' fällt nach innen, keine Spalte im FS):

E_2'	E_3'	E_4'	$E_5' = E_7$
		2	4
	1		
		4	2
2			
		2	4
	4		
		1	2, 4
		4	2
	1		
		2	4
4			
		4	2
	2		
		1	4, 2

Dies sind Blöcke des FS(H). Für den zweiten Block im FS(G) zu den Ecken E_4, E_5, E_6, E_7 erhält man die Blöcke das FS(H) analog.

Fall V, Anschluß R_5 an E_6, E_7, E_1.



Figur 4

Achtung: Die Basisseite von G ist die nicht dargestellte Kante (E_1, E_2).
Für $E_1, E_2, \cdots E_6$ wird für FS(H) das FS(G) übernommen. (E_1, E_2) Basisseite von H, $(f(E_1) = 1,\ f(E_2) = 2)$. (E_1', E_2') Basisseite von R_5.
Im FS(H) muß die Konstruktion gekoppelte Spalten für E_3', E_4' liefern. (Wenn das FS(H) mit E_1, E_2 beginnt, sind E_3', E_4' die "letzten" Ecken auf dem Rand von H.)

Die möglichen Blöcke im FS(G) sind:

E_5	E_6	E_7	E_1	E_5	E_6	E_7	E_1
	1	4, 2			4	2	
2				1			
	4	2			2	4	
			1				1
	1	2,4			4	2	
4				2			
	2	4			1	4, 2	

und

	2	4	
1			
	4	2	
			1
	2	4	
4			
	1	2, 4	

In Abhängigkeit von $f(E_7), f(E_6)$ sind für R_5 die möglichen Färbungen durch entsprechende Blöcke beschrieben. Passende Färbungen sind die, für die $f(E_5') = f(E_1) = 1$.

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
			1	4				1	2
		2					2		
			4	1				4	1, 2
2	1				4	1			
			1	4				1	2
		4					4		
			2	1, 4				2	1
			4	1				2	1
		1					1		
			2	4, 1				4	2, 1
2	4				4	2			
			4	1				2	1
		2					4		
			1	4				1	2

Da $f(E_1') = f(E_7)$ und $f(E_7) \neq f(E_1) = 1$ sind dies alle in Frage kommenden Möglichkeiten. Für die möglichen Werte von $f(E_6)$, 1,2 und 4 ergeben sich:

E_6			E_1
E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
	2	4	
1			1
	4	2	
	1	2, 4	
2			1
	4	2	
	1	2, 4	
4			1
	2	4	

Als Färbungen für die Randecken E_5, $E_2^{'} = E_6$, $E_3^{'}$, $E_4^{'}$, $E_5^{'} = E_1$ von H haben wir in Abhängigkeit von $f(E_5)$ folgende Blöcke:

E_5	E_6	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$
		2	4
	1		
		4	2
2			
		1	2, 4
	4		
		2	4
		2	4
	1		
		4	2
4			
		1	2, 4
	2		
		4	2
		1	2, 4
	2		
		4	2
1			
		1	2, 4
	4		
		2	4

also ein FS für H.

Zu jeder möglichen Wahl einer Kante von G als Basisseite von H gibt es ein FS, also ist H ein fm Graph mit FS. Die Fälle in denen eine Kante von R_5 als Basisseite gewählt wird, werden später erledigt.

Die spezielle Wahl $\gamma(G) = 7$ diente dazu, die oben erwähnten drei Schritte bei der Konstruktion des FS(H) zu demonstrieren.

(1) Für die Ecken "vor" R_5 wird das FS(G) übernommen.

(2) Für die Ecken von R_5 auf dem Rand von H wird mit Hilfe der FS(G) und FS(R_5) die Fortsetzung des FS(H) konstruiert. Dabei kommt es wesentlich darauf an, daß es genügend passende Färbungen gibt.

(3) Für die Ecken von G auf dem Rand von H "nach" R_5 werden entsprechende TFS von G für das FS(H) genomen.

Für Werte $\gamma(G) > 7$ ist die Konstruktion des FS(H) völlig analog möglich:

Lemma 5

Sei G ein fm Graph mit FS, $\gamma(G) > 7$, k=3, dann ist H = $G + R_5$ ein fm Graph mit FS.

Der Beweis ist gleich dem von Lemma 4. Lediglich die Teile des FS(G), die für FS(H) übernommen werden, haben entsprechend mehr Spalten.

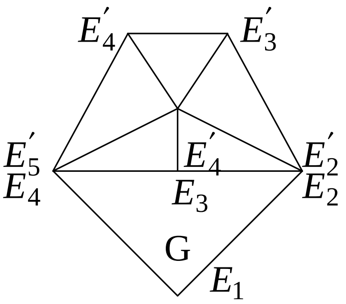
Für $\gamma(G) < 7$ sei $\gamma(G) = 4$ betrachtet:

Lemma 6

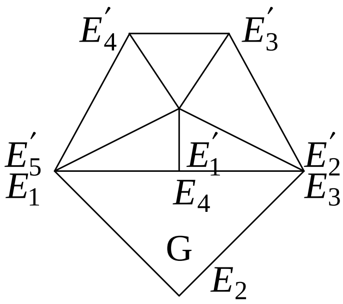
Sei $\gamma(G) = 4$, H = G + R_5, k = 3. Dann ist H ein fm Graph mit FS.

Beweis: E_1, E_2, E_3, E_4 bezeichnen die Ecken von G, E_1', E_2', E_3', E_4', E_5' bezeichnen die Ecken von R_5.

Es ist ein FS(H) anzugeben mit (E_1, E_2) als Basisseite, Figur 4.5.3.1 und ein FS(H) anzugeben mit (E_1, E_2) als Basisseite, Figur 4.5.3.2.



Figur 4.5.3.1



Figur 4.5.3.2

1.Fall, Figur 4.5.3.1 Identifiziert werden $E_2 = E_2'$, $E_3 = E_1'$ und $E_4 = E_5'$. E_3 fällt nach innen.

Das FS(R_5) für $f(E_1') = 1$, $f(E_2') = 2$ ist (rechts das FS(G))

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_1	E_2	E_3	E_4
			2	4			1	4, 2
		1			1	2		
			4	2			4	2
1	2							
			2	4				
		4						
			1	2, 4				

Das FS(R_5) für $f(E_1') = 4$, $f(E_2') = 2$ ist

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
			2	1
		1		
			4	2, 1
4	2			
			2	1
		4		
			1	2

Eingetragen in eine Tabelle gibt

E_1	E_2	E_3				E_4
	E_2'	E_1'	E_3'	E_4'	E_5'	
				2	4	
			1			
				4	2	
		1				4,2
				2	4	
			4			
				1	2, 4	
1	2					
				2	1	
			1			
				4	2, 1	
		4				2
				2	1	
			4			
				1	2	

Färbungen sind zulässig, wenn $f(E_5') = f(E_4)$. Das ergibt für H:

E_1	E_2	E_3'	E_4'	$E_5' = E_4$
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			2	4
		4		
			1	2, 4

2. Fall, Figur 4.5.3.2

Identifiziert werden $E_1 = E_5'$, $E_3 = E_2'$ und $E_4 = E_1'$. E_4 fällt nach innen.

Das FS(R_5) für $f(E_1') = 4$, $f(E_2') = 1$ ist

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
			1	2
		2		
			4	1, 2
4	1			
			1	2
		4		
			2	1

Das FS(R_5) für $f(E_1') = 2$, $f(E_2') = 4$ ist

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
			4	1
		1		
			2	4, 1
2	4			
			4	1
		2		
			1	4

Eingetragen in eine Tabelle gibt

E_1	E_2	E_3				E_4
		E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_1'
				1	2	
			2			
				4	1, 2	
		1				4 (, 2)
				1	2	
			4			
				2	1	
1	2					
				4	1	
			1			
				2	4, 1	
		4				2
				4	1	
			2			
				1	4	

Färbungen sind zulässig, wenn $f(E_5') = f(E_1)$. Das ergibt für H:

E_1	E_2	E_3'	E_4'	E_5'
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			1	4, 2
		4		
			2	4

Bemerkung: das FS(R_5) zu $f(E_4) = 2 = f(E_1')$ wurde nicht verwendet, es liefert keine weiteren Färbungen für H.

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'
			1	4
		2		
			4	1
2	1			
			1	4
		4		
			2	1, 4

liefert für das FS(H) die bereits gefundenen Färbungen:

E_1	E_2	E_3'	E_4'	E_5'
			2	4
		1		
			4	2
1	2			

Wir betrachten die Fälle, in denen als Basisseite eine Kante von R_5 gewählt wird. (Wir sparen uns Figuren dazu. Die Basisseite ist nicht (E_1, E_2) bzw. (E_1', E_2') sondern wie angegeben. Die Angaben beziehen sich auf Figur 4.5.3.1.)

Alle FS(G) in Abhängigkeit von $f(E_3)$, $f(E_4)$ seien für das folgende notiert:

E_3	E_4	E_1	E_2		E_3	E_4	E_1	E_2
		1	4, 2				2	1,2
1	2				1	4		
		4	2				4	2
		2	4, 1				2	1, 4
2	1				2	4		
		4	1				1	4
		4	2, 1				4	1,2
4	1				4	2		
		2	1				1	2

Sei (E_4', E_5') Basisseite von R_5, dann sind E_2', E_3' die gekoppelten Ecken von R_5.
Als Basisseite von G wählen wir (E_3, E_4).
Dann sind E_1, E_2 die gekoppelten Ecken von G, das FS(R_5)

E_4'	E_5'	E_1'	E_2'	E_3'
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			2	4
		4		
			1	2, 4

Dazu das FS(G) mit $f(E_3) = f(E_1^{'})$, $f(E_4) = f(E_5^{'})$ in einer Tabelle mit den Färbungen von G

$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	$E_1^{'}$			$E_2^{'}$	$E_3^{'}$
	E_4	E_3	E_1	E_2		
			1	4, 2		
					2	4
			4	2		
		1				
			1	4,2		
					4	2
			4	2		
1	2					
			4	1, 2		
					2	4
			1	2		
		4				
			4	1, 2		
					1	2,4
			1	2		

Es passen die Färbungen, für die $f(E_2) = f(E_2^{'})$, rechts als FS geschrieben ($E_1^{'}$ fällt nach innen)

$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	E_1	E_2	$E_3^{'}$
1	2	1	2	4
		4	2	4
		1	4	2
		4	2	4
		4	1	2, 4

$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	E_1	E_2	$E_3^{'}$
			4	2
		1		
			2	4
1	2			
			2	4
		4		
			1	2, 4

Sei (E_3', E_4') Basisseite von R_5, dann sind E_1', E_2' die gekoppelten Ecken von R_5. Als Basisseite von G wählen wir (E_3, E_4), dann sind E_1, E_2 die gekoppelten Ecken von G. Das FS(R_5)

E_3'	E_4'	E_5'	E_1'	E_2'
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			2	4
		4		
			1	2, 4

Dazu das FS(G) mit $f(E_3) = f(E_1')$, $f(E_4) = f(E_5')$ in einer Tabelle mit den Färbungen von G

E_3'	E_4'	E_5'	E_1'			E_2'
		E_4	E_3	E_1	E_2	
				2	4, 1	
			2			4
				4	1	
		1				
				4	2, 1	
			4			2
				2	1	
1	2					
				2	1, 4	
			2			4
				1	4	
		4				
				1	2, 4	
			1			2, 4
				2	4	

Es passen die Färbungen, für die $f(E_2) = f(E_2')$, rechts als FS geschrieben (E_1' fällt nach innen)

E_3'	E_4'	E_5'	E_1	E_2'		E_3'	E_4'	E_5'	E_1	E_2'
1	2	1	2	4					4	2
		1	4	2				1		
		4	2	4					2	4
		4	1	4		1	2			
		4	1	2					2	4
		4	1	4				4		
		4	2	4					1	2, 4

Sei $(E_2^{'}, E_3^{'})$ Basisseite von R_5, dann sind $E_5^{'}, E_1^{'}$ die gekoppelten Ecken von R_5. Als Basisseite von G wählen wir (E_3, E_4), dann sind E_1, E_2 die gekoppelten Ecken von G.

Das FS(R_5)

$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	$E_1^{'}$
			2	4
		1		
			4	2
1	2			
			2	4
		4		
			1	2, 4

Dazu das FS(G) mit $f(E_3) = f(E_1^{'})$, $f(E_4) = f(E_5^{'})$ in einer Tabelle mit den Färbungen von G

$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	$E_1^{'}$			$E_2^{'}$
			E_4	E_3	E_1	E_2	
					4	1, 2	
			2	4			
					1	2	
		1					
					2	1, 4	
			4	2			
					1	4	
1	2						1
					4	1, 2	
			2	4			
					1	2	
		4					
					2	4, 1	
			1	2			
					4	1	
					2	4, 1	
			1	4			
					4	1	

Es passen die Färbungen, für die $f(E_2) = f(E_2')$, rechts als FS geschrieben
(E_1' fällt nach innen)

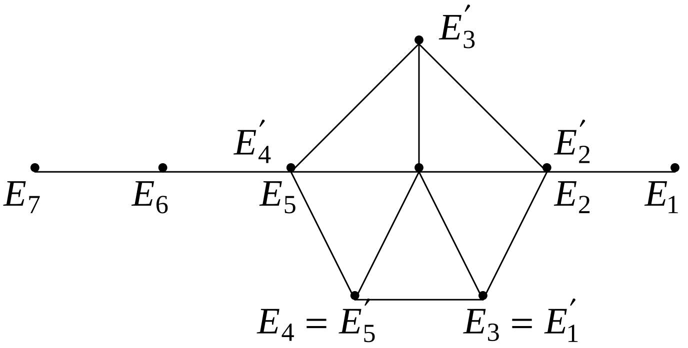
E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_1		E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	E_1
1	2	1	2	4					2	4
		1	4	2				1		
		4	2	4					4	2
		4	1	2		1	2			
		4	1	4					2	4
		4	1	4				4		
		4	1	2					1	2, 4

Zu jeder Wahl einer Kante von R_5 als Basisseite von H erhalten wir also ein FS(H).

Wir betrachten den Fall, daß vier Ecken von G und R_5 identifiziert werden (d. h. k = 4).

Lemma 7

Sei G ein fm Graph mit FS, $\gamma(G) = 7$, k=4, dann ist H = G + R_5 ein fm Graph mit FS. Das FS(H) ist gleich FS(R_6).



Figur 7.5.4

Es gibt vier Möglichkeiten, eine Kante von G als Basisseite von H zu wählen:

I (E_1, E_2), II (E_5, E_6), III (E_6, E_7), IV (E_7, E_1)

Diese Vorgehensweise unterscheidet sich vielleicht auf den ersten Blick von der bei Lemma 4. Tatsächlich kommt es nur auf die Lage der Basisseite relativ zu den Ecken, an denen R_5 angeschlossen wird, an. Es ist also dasselbe Vorgehen, wir brauchen nur eine Figur zur Illustration.

Fall I, (E_1, E_2) Basisseite von H. Das Teil-FS(G) für E_2, E_3, E_4, E_5

E_2	E_3	E_4	E_5	Zeile
			1	(1)
		2		
			4	(2)
	1			
			1	(3)
		4		
			2	(4)
2				
			4	(5)
		2		
			1	(6)
	4			
			4	(7)
		1		
			2	(8)

(E_1', E_2') wird als Basisseite von R_5 gewählt. Das FS(R_5) für $f(E_1') = 1$

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	Zeile
			2	4	(1’)
		1			
			4	2	(2’)
1	2				
			2	4	(3’)
		4			
			1	2, 4	(4’)

Mögliche Färbungen für H, $f(E_4') = f(E_5)$ und $f(E_5') = f(E_4)$. E_1', E_1' fallen nach innen.

E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	
2	4	1	2	(1) (4’)
	1	4	2	(2) (2’)
	4	1	4	(3) (4’)
	1	2	4	(4) (1’)
	4	2	4	(4) (3’)

Als Block im FS(H) für $f(E_5) = 1$

		2
	1	
		4
2		
		2
	4	
		1

FS(R_5) für $f(E_1') = 4$

E_1'	E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	Zeile
			2	1	(1’)
		1			
			4	2, 1	(2’)
4	2				
			2	1	(3’)
		4			
			1	2	(4’)

E_2'	E_3'	E_4'	E_5'	
4	1	4	2	(5) (2’)
	4	1	2	(6) (4’)
	1	4	1	(7) (2’)
	1	2	1	(8) (1’)
	4	2	1	(8) (3’)

Als Block im FS(H) für $f(E_5) = 4$

		2
	1	
		4
2		
		2
	4	
		1

Dieselben Färbungen sind nochmal möglich. Der Grund: es gibt maximale Graphen mit mehr als einer Färbung (wie immer ohne Berücksichtigung der Permutationen.)

Für die weiteren Fälle geben wir die FS(R_5) in Abhängigkeit von $f(E_1^{'})$, $f(E_2^{'})$ an

$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$	$E_1^{'}$	$E_2^{'}$	$E_3^{'}$	$E_4^{'}$	$E_5^{'}$
			2	4				4	2
		1					1		
			4	2				2	4
1	2				1	4			
			2	4				4	2
		4					2		
			1	2, 4				1	4, 2
			1	4				4	1
		2					2		
			4	1				1	4
2	1				2	4			
			1	4				4	1
		4					1		
			2	1, 4				2	4, 1
			1	2				2	1
		4					4		
			2	1				1	2
4	1				4	2			
			1	2				2	1
		2					1		
			4	1, 2				4	2, 1

Fall II, (E_5, E_6) Basisseite von H, also (E_5, E_6) als Basisseite von G wählen. (E_2', E_3' müssen sich dann als die gekoppelten Ecken im FS(H) herausstellen.)
FS(G) für E_5, E_6, E_7, E_1, E_2, E_3, E_4 nur den Anfang, FS(G) ist gleich FS(R_7).

E_5	E_6	E_7	E_1	
			2	*
		1		
			4	
1	2			
			2	
		4		
			1	

(E_1', E_2') wird als Basisseite von R_5 gewählt.
FS(R_5) hängt ab von $f(E_1')$, $f(E_2')$. Gesucht sind die Färbungen von E_3', E_4' mit den Bedingungen $f(E_5') = f(E_4)$ und $f(E_1') = f(E_5)$. Wegen des benötigten Platzes betrachten wir die Teil-FS für die verschiedenen Werte von $f(E_1)$ einzeln.
$f(E_1) = 2$
Der entsprechende Teil des FS(G), d. h. die Fortsetzung zum ersten Element in der Spalte von E_1 (oben Zeile mit *) ist

E_1	E_2	E_3	E_4
		2	4
	1		
		4	2
2			
		2	4
	4		
		1	2, 4

Zusammen mit den passenden FS(R_5)

E_1	E_2	E_3			E_5		E_4	Zeile
	E_2'	E_1'	E_3'	E_4'		E_5'		
				1		4		*
			2					
				4		1		
		2					4	
				1		4		*
			4					
				2		1, 4		
	1							
				2		1		
			4					
				1		2		*
		4					2	
				2		1		
			1					
				4		2, 1		
2					1			
				4		1		
			2					
				1		4		*
		2					4	
				4		1		
			1					
				2		4, 1		
	4							
				4		2		
			1					
				2		4		
		1					2, 4	
				4		2		
			2					
				1		4, 2		*

Die Zeilen mit * erfüllen $F(E_4) = F(E_5^{'})$ und $F(E_5) = F(E_4^{'})$ und sind die passenden Färbungen:

E_1	E_2	$E_3^{'}$	E_5
2	1	2	1
	1	4	1
	1	4	1
	4	2	1
	4	2	1

E_1	E_2	$E_3^{'}$
	1	2, 4
2		
	4	2

Rechts im Format für das FS(H).

$f(E_1) = 4$

Zusammen mit den passenden FS(R_5)

E_1	E_2	E_3			E_5		E_4	Zeile
	E_2'	E_1'	E_3'	E_4'		E_5'		
				1		2		*
			4					
				2		1		
		4					2	
				1		2		
			2					
				4		1, 2		
	1							
				1		4		*
			2					
				4		1		
		2					4	
				1		4		*
			4					
				2		1, 4		
4					1			
				2		1		
			4					
				1		2		*
		4					2	
				2		1		
			1					
				4		2, 1		
	2							
				2		4		
			1					
				4		2		
		1					4, 2	
				2		4		
			4					
				1		2, 4		*

Die Zeilen mit * sind die passenden Färbungen:

E_1	E_2	E_3	E_4		E_1	E_2	E_3
4	1	4	1			1	2, 4
	1	2	1		4		
	2	4	1			2	4
	2	4	1				

Rechts im Format für das FS(H).

$f(E_1) = 1$

Zusammen mit den passenden FS(R_5)

E_1	E_2	E_3			E_5		E_4	Zeile
	E_2'	E_1'	E_3'	E_4'		E_5'		
				4		2		
			1					
				2		4		
		1					2, 4	
				4		2		
			2					
				1		4, 2		
	4							
				4		1		
			2					
				1		4		*
		2					4	
				4		1		
			1					
				2		4, 1		
1					1			
				2		4		
			1					
				4		2		
		1					4, 2	
				2		4		
			4					
				1		2, 4		*
	2							
				2		1		
			4					
				1		2		*
		4					2	
				2		1		
			1					
				4		2, 1		

Die Zeilen mit * sind die passenden Färbungen:

E_1	E_2	E_3	E_4		E_1	E_2	E_3
1	4	2	1			4	2
	2	4	1		1		
	2	4	1			2	4

Rechts im Format für das FS(H).

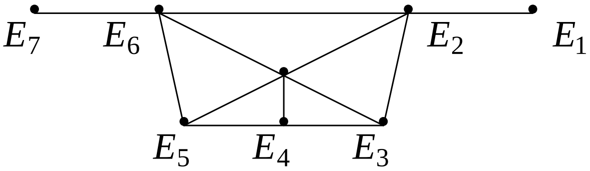
Als FS(H) haben wir

E_5	E_6	E_7	E_1	E_2	E_3
				1	2, 4
			2		
				4	2
		1			
				1	2, 4
			4		
				2	4
1	2				
				1	2, 4
			2		
				4	2
		4			
				2	4
			1		
				4	2

das ist FS(R_6), siehe z. B. Seite 3.3.

Fall III, (E_6, E_7) Basisseite von H und Fall IV, (E_7, E_1) Basisseite von H gehen analog. Die Ausführung wird mit dem Hinweis auf den allgemeinen Fall, Satz im nächsten Abschnitt weggelassen.

Lemma 8 Sei $\gamma(G) = 7$, k = 5. H = G + R_5.



Ecken von R_5: $E_1' = E_3$, $E_2' = E_2$, $E_3' = E_6$, $E_4' = E_5$, $E_5' = E_4$, Das FS von G, obere Hälfte und das FS von R_5 mit den "richtigen" Farben für E_2', E_1'.

E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_2'	E_1'	E_5'	E_4'	E_3'	
				2	4
			1		
				4	2
		2			
				2	4
			4		
				1	2, 4
	1				
				4	2
			1		
				2	4
		4			
				4	2
			2		
				1	4, 2
2					
FS(R_5)					
		4	2		
				1	
		2	4		
2	1				
		4	2		
				4	
		2, 4	1		

Die möglichen Färbungen

E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
2	1	2	1	4	2
		2	4	1	2, 4
		4	1	4	2
		4	2	4	2

E_3, E_4 und E_5 fallen nach innen, keine Spalte im FS:

E_1	E_2	E_6	E_7
	E_2'	E_3'	
		4	2
1	2		
		1	4, 2

Analog die untere Hälfte des FS

E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_2'	E_1'	E_5'	E_4'	E_3'	
2					
				2	4
			4		
				1	2, 4
		2			
				2	4
			1		
				4	2
	4				
				1	2, 4
			4		
				2	4
		1			
				1	4, 2
			2		
				4	2

FS(R_5)

		1	2	
				1
		2, 1	4	
2	4			
		1	2	
				4
		2	1	

Die möglichen Färbungen

E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
2	4	2	4	1	2, 4
		2	1	4	2
		1	4	1	2, 4
		1	2	1	4, 2
		1	2	4	2

E_3, E_4 und E_5 fallen nach innen, keine Spalte im FS:

E_1	E_2	E_6	E_7
	E_2'	E_3'	
		1	2, 4
1	2		
		4	2

Bemerkungen zu den Beweisen von Lemma 4 bis Lemma 8:

1. Ersetzen wir R_5 durch einen Graph G' mit FS mit γ(G') = 5 so bleiben alle Beweise gültig.

2. Der fehlende Teil der Beweise, nämlich daß als Basisseite von H = G + R_5 eine Seite von R_5 gewählt wird, wird durch den folgenden Satz mit erledigt.