Färbungen Räder, das Färbungsschema

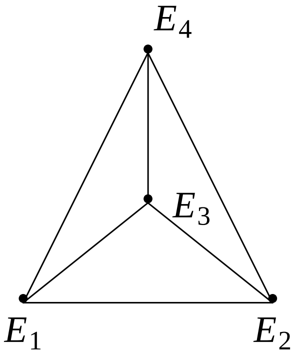

Fig 1, R_3

Wir färben den Graphen Fig 1: $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 2$, $f(E_3) = 3$, $f(E_4) = 4$.
Die Färbung notieren wir zunächst so:

E_1	E_2	E_3	E_4
1	2	3	4

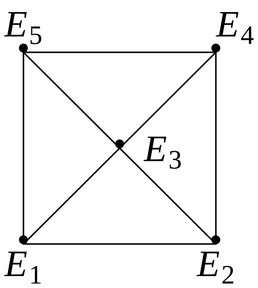

Fig 2, R_4

Wir färben den Graphen Fig 2, zunächst die Ecken E_1, E_2, E_3: $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 2$, $f(E_3) = 3$. Für E_4 sind zwei Farben möglich: $f(E_4) = 1$ und $f(E_4) = 4$. Welche Farben für E_5 möglich sind, ist abhängig von der Farbe von E_4. Als mögliche Färbungen des Graphen Fig 2 haben wir:

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
1	2	3	1	2
1	2	3	1	4
1	2	3	4	2

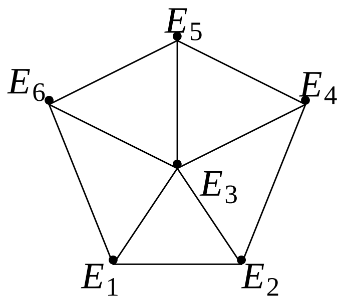

Fig 3, R_5

Wir färben den Graphen Fig 3.

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	2	3	1	2	4
1	2	3	1	4	2
1	2	3	4	2	4
1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	4

Die Notierung der Färbungen ist mühsam und unübersichtlich, vereinfacht können wird schreiben:

E_1	E_2	E_4	E_5	E_6		E_1	E_2	E_4	E_5	E_6
			2	4		1	2	1	2	4
		1								
			4	2		1	2	1	4	2
1	2				=					
			2	4		1	2	4	2	4
		4								
			1	2, 4		1	2	4	1	2
						1	2	4	1	4

Es dürfte klar sein wie eine solche Tabelle - wir nennen sie "Färbungsschema" (FS) - zu lesen ist. Es wird sich im weiteren zeigen, daß diese Art die möglichen Färbungen zu beschreiben mehr als nur eine Arbeitserleichterung ist.

Es folgen die FS für R_6 und für R_7.
Die zweite Zeile ist die "neue" Numerierung der Randecken nachdem E_3 nach innen gefallen ist.

FS(R_6)

E_1	E_2	E_4	E_5	E_6	E_7
				1	4, 2
			2		
				4	2
		1			
				1	2, 4
			4		
				2	4
1	2				
				4	2
			2		
				1	4, 2
		4			
				4	2
			1		
				2	4

Die Spalten zu E_6, E_7 heißen gekoppelte Spalten. Die entsprechenden Ecken nennen wir zur Vereinfachung gekoppelte Ecken.

Wir stellen fest:
Zu jeder Ecke des Randes gehört eine Spalte im FS. Die Reihenfolge der Spalten entspricht der Reihenfolge der Ecken auf dem Rand, wenn man den Rand in mathematisch positiver Orientierung durchläuft. (Die entgegengesetzte Orientierung liefert keine weiteren Färbungen, die für die folgenden Konstruktionen von FS zu gebrauchen wären.)
Die Kante von E_1 nach E_2 heißt Basisseite, $f(E_1) = 1, f(E_2) = 2$ nach entsprechender Permutation der Farben.
Zu Ecken im Inneren des Graphen gibt es im FS keinen Eintrag.
Die durch das FS beschriebenen Färbungen der Randecken sind alle verschieden, zu jeder Färbung existiert eine Fortsetzung nach innen.

FS(R_7). Die Spalte "Block" gehört nicht zum FS, sie dient späteren Erklärungen. Zu E_3 - diese Ecke liegt nicht auf dem Rand - gibt es keine Spalte im FS.
Die zweite Zeile ist die "neue" Numerierung der Randecken nachdem E_3 nach innen gefallen ist.

E_1	E_2	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	Block
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	
					2	4	
				1			
					4	2	
			2				I
					2	4	
				4			
					1	2, 4	
		1					
					4	2	
				1			
					2	4	
			4				II
					4	2	
				2			
					1	4, 2	
1	2						
					2	4	
				4			
					1	2, 4	
			2				III
					2	4	
				1			
					4	2	
		4					
					1	2, 4	
				4			
					2	4	
			1				IV
					1	4, 2	
				2			
					4	2	

E_7, E_8 sind die gekoppelten Ecken (mit gekoppelten Spalten).

Einen Eintrag (Farbe) in einer Spalte nennen wir Element. Zu einem Element einer Spalte gehören Elemente der nächsten Spalte und zu diesen wiederum Elemente der übernächsten Spalte usw. Zu jedem Element gehört auf diese Weise ein Teil des FS (TFS). Ein Element und die zugehörigen Elemente der nächsten beiden Spalten bilden zusammen sogenannte "Blöcke".
Es dürfte klar sein, was unter zusammengehörenden Blöcken zu verstehen ist: zwei Blöcke gehören zusammen, wenn sie in der vorherigen Spalte zu demselben Element gehören.

Beispiele:
Wir betrachten zuerst Blöcke, die nicht Elemente der letzten Spalte enthalten.

FS(R_6), zu "2" von E_2 bzw. zu "1" von E_4 bzw. zu "4" von E_2 erhalten wir die Blöcke:

		2				1				4
	1				2				2	
		4				4				1
2			bzw.	1			bzw.	4		
		2				1				4
	4				4				1	
		1				2				2

FS(R_7), zu "2" von E_2 bzw. zu "2" von E_5 bzw. zu "1" von E_5 erhalten wir die Blöcke:

		2				2				1
	1				1				4	
		4				4				2
2			bzw.	2			bzw.	1		
		2				2				1
	4				4				2	
		1				1				4

Nach passender Permutation der Farben und Vertauschen der Zeilen sind alle Blöcke gleich, also alle nur von einem "Typ".

Nun betrachten wir die Blöcke, die wir erhalten, wenn die beiden letzten Spalten des FS zum Block gehören.

Wenn wir in den gekoppelten Spalten, also zu E_7 und E_8, die jeweils auf naheliegende Weise zusammengehörenden Farben betrachten ("2-Block"), stellen wir fest, daß es nur folgende "Typen" gibt:

	2	4			1	4, 2			2	4
1			,	2			,	4		
	4	2			4	2			1	2, 4

Nach Permutation der Farben (und geeigneter Reihenfolge der Zeilen) also nur zwei Typen.
Wir stellen fest: in den letzten drei Spalten eines FS eines Rades treten nur Blöcke auf der Form:

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 4 \\ 1 & & \\ & 4 & 2 \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} & 1 & 4,2 \\ 2 & & \\ & 4 & 2 \end{array}$$

Von den vier Blöcken, Block I bis IV im FS(R_7), sind die ersten drei gleich (nach Permutation, geeignete Reihenfolge der Zeilen), d.h. es gibt zwei Typen von Blöcken. Diese Blöcke finden wir auch schon im FS(R_6).

Als Beispiel zeigen wir Block III = Block II:

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 4 \\ & 4 & & \\ & & 1 & 2,4 \\ 2 & & & \\ & & 2 & 4 \\ & 1 & & \\ & & 4 & 2 \end{array} = \begin{array}{cccc} & & 4 & 2 \\ & 2 & & \\ & & 1 & 4,2 \\ 4 & & & \\ & & 4 & 2 \\ & 1 & & \\ & & 2 & 4 \end{array} = \begin{array}{cccc} & & 4 & 2 \\ & 1 & & \\ & & 2 & 4 \\ 4 & & & \\ & & 4 & 2 \\ & 2 & & \\ & & 1 & 4,2 \end{array}$$

Für die Räder R_8, R_9, ... gibt es offenbar jeweils ganz analog ein FS. Es kommen auch nur dieselben Blöcke vor. Das ist leicht einzusehen: die obere Hälfte von FS(R_6) ist gleich Block IV, die untere Hälfte von FS(R_6) ist gleich Block I, durch eine weitere Ecke (E_8 im FS(R_7)) erhalten wir zu Block IV zweimal Block I, zu Block I erhalten wir Block I und Block IV. Mit einer weiteren Ecke E_9 erhalten wir FS(R_8) wieder mit den entsprechenden Blöcken usw.
Die Basisseite E_1, E_2 können wir beliebig wählen. (Wegen der Symmetrie des Rades trivial.)
Mit (E_n, E_m) sei die Kante, die E_n mit E_m verbindet, bezeichnet.
Zusammengefaßt haben wir

Lemma 1
Das Rad R_n besitzt Färbungen, die durch ein FS beschrieben werden. Die Basisseite ist frei wählbar.
Das FS beschreibt (mindestens) 2^{n-3} Färbungen.

Unser Ziel ist der Beweis von
Satz
Sei G ein fm Graph, dann gibt es für G das gleiche FS wie für $R_{\gamma(G)}$.
Daraus folgt der Satz auf Seite 1.1.